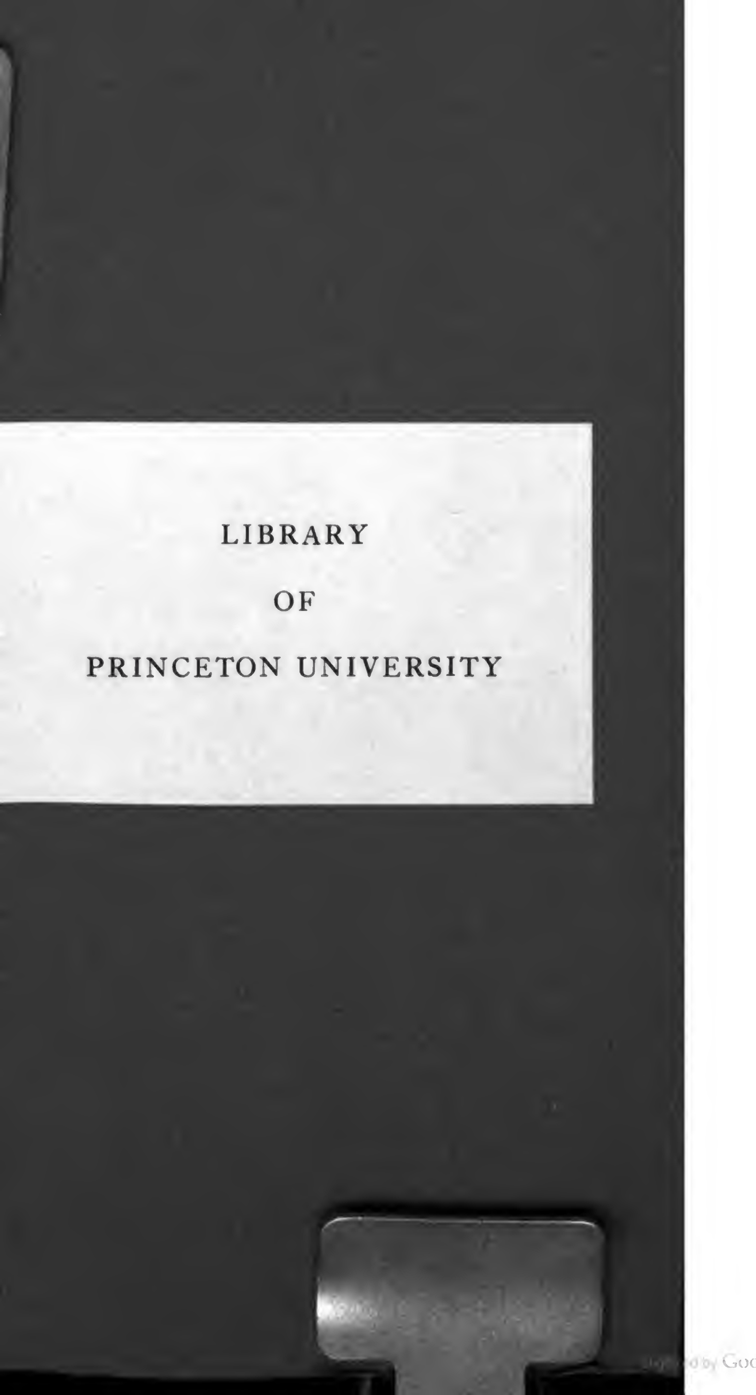


BECKER

UEBER DIE

METHODE DES GEOMETRISCHEN UNTERRICHTS.


LIBRARY
OF
PRINCETON UNIVERSITY

Ueber die

Methode des Geometrischen Unterrich

nebst

Erläuterungen zu dem Leitfaden.

von

Bernhard Becker.

Frankfurt a.Main
Hermannsche buchhandlung
1845.


LIBRARY
OF
PRINCETON UNIVERSITY

Ueber die Methode des Geometrischen

nebst

Erläuterungen zu dem Leitfade

von

Bernhard Becker.

a.Main

buchhandlung



Ueber die

Methode des Geometrischen Unterrich

nebst

Erläuterungen zu dem Leitfaden.

von

Bernhard Becker.

Frankfurt a.Main
Hermannsche buchhandlung
1845.

Vorrede.

Der Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie, der zugleich mit diesem Schriftchen dem Publikum übergeben wird, war schon gedruckt, als mir von mehreren Seiten gerathen wurde, ein in so wesentlichen Punkten vom gewohnten Pfade abweichendes Schulbuch nicht ohne einen erläuternden Kommentar bekannt werden zu lassen. So habe ich mich genöthigt gesehen, diese Abhandlung über die Methode eiliger auszuarbeiten, als eine so schwierige Sache erlaubt. Da die Darstellung und Begründung an vielen Stellen gewiß noch sehr mangelhaft ist, da es mir namentlich in der kurzen Zeit bei meiner etwas isolirten Stellung fast unmöglich war, auf das

Rücksicht zu nehmen, was von Andern in Sachen der geometrischen Unterrichtsmethode in neuerer Zeit wol gesagt sein möchte; so wird Manchem vielleicht die ganze Erscheinung dieser Schrift, so wie einzelne Stellen derselben etwas verwegen vorkommen. Allein Fehler in der Form möge man mit den besagten Umständen entschuldigen, und dagegen die Sache selbst, die für die gesunde Entwickelung der modernen Schule von großer Bedeutung ist, einer unbefangenen Prüfung würdigen. Uebrigens kann ich, was die Methode selbst betrifft, versichern, daß, wenn auch ähnliche Ideen schon hier und dort mögen ausgesprochen sein, doch unter den in neuerer Zeit erschienenen Schulbüchern meines Wissens kein einziges den hier vorgeschlagenen und im Leitfaden betretenen Weg einschlägt und mit Konsequenz durchführt. Die in den folgenden Blättern versuchte wissenschaftliche Begründung der genetischen Methode lehnt sich einerseits an Trendelenburg's logische Untersuchungen, andererseits an J. Steiner's Forschungen an; und ich ergreife gern diese Gelegenheit, um beiden Männern, meinen verehrten Lehrern, für die mannigfaltigen Anregungen zu danken, die mir theils aus ihren

Schriften, theils aus ihren Vorlesungen geworden sind. Mögen sie ihre Ideen und Vorstellungsweisen in dieser elementaren Darstellung nicht zu sehr entstellt finden!

Freilich habe ich nur ein sehr beschränktes Gebiet in ihrem Sinne zu behandeln versucht, und vielleicht wäre es besser gewesen, sogleich mit einem die ganze Geometrie (so weit sie auf Schulen vorgetragen wird) umfassenden Lehrbuche aufzutreten. Allein es schien mir nothwendig, ehe ich das hiermit angefangene Werk fortsetzte, abzuwarten, wie erfahrene Schulmänner über diese Umgestaltung des geometrischen Unterrichts urtheilen würden. Im günstigen Falle denke ich demnächst auch die Stereometrie und die Trigonometrie in ähnlicher Weise zu behandeln. Einem gewandten Lehrer wird es indessen leicht sein, auch ohne dem Schüler ein Buch in die Hand zu geben, den weiteren Unterricht in derselben Weise umzugestalten; ja er wird dabei die Erfahrung machen, daß der tüchtige Schüler am sichersten lernt, wenn er kein Schulbuch hat, in dem er, „was er schwarz auf weiß besitzt, getrost nach Hause tragen kann," sondern wenn er genöthigt

wird, die Lehrsätze u. s. w. sogleich mit der ganzen Energie der Seele sich anzueignen. Dies ist freilich nur möglich, wenn der Zusammenhang der Lehrsätze und ihre Begründung nicht gekünstelt, sondern naturgemäß fortschreitend ist.

In dieser Beziehung kommt es nur darauf an, die Elemente der Geometrie wirklich genetisch darzustellen; dann gibt sich das Uebrige wie von selbst. Ja Schüler, die auf dem hier bezeichneten Wege in die Geometrie eingeführt worden sind, gewinnen, wie ich erfahren habe, die Methode der vernünftigen Einsicht so lieb, daß sie auch bei weiterem Fortschritte die Spitzfindigkeiten erkünstelter Beweise verschmähen und überall in das Wesen der Dinge einzudringen suchen. Freilich wird es dann auf einer höheren Stufe einen bedeutenden Kampf kosten, bis sie sich in die Nothwendigkeit fügen, mit Formeln zu arbeiten, deren Inhalt sich nicht in der Phantasie konstruiren läßt, ja bei denen man oft gar nichts zu denken hat. Allein für den Zweck einer allgemeinen Bildung, wie sie von unsern Schulen verlangt wird, ist die genetische Darstellung und die mit Einsicht und Vernunft entwickelnde Begründung von unendlich größerer Wichtigkeit, als die Ue-

bung im algebraischen Calcül, der eigentlich erst bei der fachmäßigen Ausbildung bedeutender hervortritt.

Da ich bei Abfassung des Leitfadens vorwaltend bemüht war, die Geometrie als ein wesentliches Mittel für allgemein menschliche Ausbildung zu behandeln, so wird das Büchlein sowol für Gymnasien als auch für höhere und niedere Bürgerschulen brauchbar sein. Wo dem mathematischen Unterricht, wie an vielen Gymnasien geschieht, nur eine geringe Stundenzahl gewidmet wird, da wird man doch den Leitfaden in einem Jahre bequem durchnehmen können; wo man mehr Zeit darauf verwendet, da wird der Lehrer leicht überall theoretische wie praktische Anwendungen und Erweiterungen der im Leitfaden gegebenen Sätze anknüpfen können.

Im Uebrigen werden die folgenden Blätter Demjenigen, dem es nicht um die Sophistik der Gelehrsamkeit, um hyperphilosophische Großsprecherei oder um verwässernde Methodenmacherei, sondern um wirkliche Belebung und Befruchtung des mathematischen Unterrichts zu thun ist, genügende Auskunft über die wesentlichen Fragen geben.

In einem Anhange sind zur Bequemlichkeit des Lehrers die Auflösungen zu den schwierigeren im Leitfaden enthaltenen Aufgaben zusammengestellt.

Oldenburg, im September 1845.

Bernhard Becker.

Einleitung.

Bei den gewaltigen Fortschritten, die der menschliche Geist in den letzten Zeiten im Bereiche der Wissenschaften gemacht hat, bei den Revolutionen, die dem praktischen Leben, dem Gewerbe und Handel eine ganz neue, großartige Entwickelung gegeben haben, steigern sich von Tag zu Tage die Forderungen, die an das heranwachsende Geschlecht gemacht werden; je intensiver und vielseitiger sich die Kräfte entwickeln, die den Fortschritt der Menschheit bedingen, desto schwieriger wird es, diejenige Bildung zu gewinnen, die den Jüngling befähigt, sich bei dem allgemeinen Ringen und Streben der Geister als Mann zu bewähren. Allein die Schule, die eine bessere Zukunft vorbereiten soll, verkennt bei den gesteigerten Anforderungen nicht die Schwierigkeit ihrer Aufgabe. Auch sie ringt nach dem Besseren; und wenn sie, dem Drange der Zeitrichtungen nachgebend, ihr Gebiet ausdehnt und neue Disziplinen in sich aufnimmt: so sucht sie auch, was durch die Zersplitterung der Kräfte verloren wird, durch Vereinfachung der Methode und organischere Behandlung der Ju-

gend wieder zu gewinnen. So sehen wir in allen Fächern ein neues reges Leben; überall entstehen neue Schulen, überall werden neue Methoden versucht. Wir stehen in einer Entwickelungsperiode, und auch die Schule wird nicht eher wieder zur Ruhe kommen, bis der ganze Entwickelungsprozeß vollbracht ist, bis alle Schulen, alle Disziplinen, von dem neuen Leben durchdrungen, eine neue, in sich feste Form gewonnen haben.

Die Mathematik nimmt unstreitig unter den Wissenschaften, auf die sich die jetzige Entwickelung der Menschheit gründet, einen sehr hohen Rang ein. Sie ist für das praktische Leben von der größten Bedeutung; sie ist die Wissenschaft, durch welche der Mensch die Natur seinen Zwecken dienstbar macht; von ihr gilt vorzüglich, was in neuerer Zeit sprüchwörtlich gesagt wird: Kenntniß ist Macht. Allein auch abgesehen von dem praktischen Nutzen, ist die Mathematik wegen ihres wissenschaftlichen Werthes als eins der fruchtbarsten Bildungsmittel anzusehen und ist auch in dieser Beziehung zu allen Zeiten von Philosophen und Pädagogen hoch geschätzt worden. Die wissenschaftliche Thätigkeit überhaupt besteht darin, daß eine Reihe von Erscheinungen in ihrem innern Zusammenhange erkannt, d. h. als Ursache und Wirkung angeschaut oder als Voraussetzung und Folgerung aus einander entwickelt werden. Dadurch hören die einzelnen Erscheinungen oder Wesen auf, einzelne zu sein; sie werden unter ein Gesetz gestellt und so in ihrer Allgemeinheit erkannt. — Alle übrigen Wissenschaften nun können dies nur in beschränktem Maße leisten, weil ihr Gegenstand äußerlich gegeben ist, und somit

entweder dem Spiele des Zufalls und unberechenbarer Umstände Raum gibt oder in eine für den menschlichen Geist unerklärliche Weltordnung hineinreicht. Wer vermöchte z. B. die faktisch gegebene Entwickelung der Weltgeschichte oder die geographische Gestaltung der Erde in allem Einzelnen als nothwendig nachzuweisen und aus absolut gültigen Axiomen zu konstruiren? Die Mathematik läßt nichts unbewiesen, sie führt alle einzelnen Erscheinungen in ihrem unbegrenzten Gebiet auf wenige Grundsätze zurück, die keines Beweises bedürfen, weil sie Forderungen der Vernunft sind, oder vielmehr, sie baut auf diesen wenigen Grundsäulen eine ganze Welt auf, die die Grenzen des irdischen Daseins weit überschreitet. Welche Wissenschaft kann sich rühmen, ohne Irrthum zu sein? Die Mathematik thut es. Alle Weisheit des Pythagoras ist untergegangen; aber der Pythagoreische Lehrsatz steht unerschüttert und wird in alle Ewigkeit fortbestehen, so lange es denkende Wesen gibt. Diese Festigkeit, diese unerschütterliche Wahrheit und Nothwendigkeit ist der Ruhm der Mathematik, und in der That hat es für uns stolze Menschenkinder einen eignen Reiz, den menschlichen Verstand als Schöpfer dieser wunderbaren reichen Welt anzustaunen; der Verstand fühlt sich hier in seiner Kraft und tummelt sich gern, frei von den Banden der Ueberlieferung oder einer ihn hemmenden Außenwelt, in dem unbegrenzten Bereiche einer nur ihm unterthänigen Welt.

Da demnach die Mathematik, was Form und Umfang betrifft, von jeher als die wissenschaftlichste aller Wissenschaften betrachtet wurde, und somit vor anderen würdig schien, erkannt zu werden: so wurde

sie seit Plato und Aristoteles immer für ein wesentliches Element einer freien, edlen Bildung angesehen. Ja es gab eine Zeit, da die Methode der mathematischen Erkenntniß als die einzig haltbare Form wissenschaftlichen Denkens galt, da nichts bewiesen schien, wenn der Beweis nicht in mathematischen Formen geführt wurde. Später freilich empfand man die große Kluft, die zwischen der vorhandenen mathematischen Methode und den Forderungen der übrigen Wissenschaften besteht; das Studium der Mathematik auf den Schulen sank unter dem Uebergewicht der philosophisch-historischen Bildung; und nachdem sie im mittelalterlichen Chor der sieben freien Künste doppelt vertreten gewesen, schien sie sich mit den sogenannten Humanitätsstudien der neueren Zeit nicht vertragen zu können. Doch sieht man sie überall, wenigstens in der Theorie der Erziehung, noch als ein wesentliches Bildungselement an, obgleich der praktische Pädagog wenig Gelegenheit hat, jene reichen Früchte zu erndten, die namentlich die alten Philosophen von den mathematischen Studien erwartet haben. Dagegen hat sich in der neuesten Zeit die große Bedeutung der Mathematik für die Naturwissenschaften und für das gesammte praktische Leben unwiderleglich dargethan, und jetzt ist der Stand der Dinge der, daß Theoretiker wie Praktiker, Philosophen wie Fabrikanten, Absolutisten wie Liberale, Kenner und Unkundige im Ruhme dieser Wissenschaft einig sind und sie auf Schulen jeder Art möglichst gehegt wissen wollen. Und in der That gibt es keine großartigere Schöpfung des Menschengeistes, als diese Wissenschaft, an der alle Jahrhunderte und alle intelligenten Gei-

ster in einer sonst nicht vorkommenden Harmonie gearbeitet haben, diese Wissenschaft, die jeden Irrthum ausschließt, die Dome baut und Festungen stürmt, die das Handelsschiff in ferne Länder führt und dem irrenden Kometen seine Bahn anweist.

Allein wie sieht es mit der Mathematik auf unsern Schulen aus? Es ist eine bekannte Thatsache, daß die Schüler, deren Gemüth in der Poesie der Jugend für die Heroen der Sagenzeit, für die Geschichte der Menschheit schwärmt, den sogenannten Freuden einer reinen, d. h. abstrakten, Erkenntniß sobald als möglich den Rücken kehren; denn sie finden hier nichts für das Gemüth, nichts für die Phantasie. Nur wenige einseitige Naturen finden wirklich Gefallen an der Wissenschaft und folgen dem Lehrer auf seinen für die Mehrzahl geheimnißvollen Wegen — und meistens leisten diese mathematischen Köpfe in den übrigen Fächern wenig Erfreuliches. Namentlich aber beschränkt sich die eigentlich pädagogische Wirkung der mathematischen Schulstudien anerkanntermaßen auf ein Minimum. Daß die Wissenschaft selbst hieran schuld sein sollte, läßt sich nicht annehmen. Es kann nur an der gewöhnlichen Unterrichtsmethode liegen, daß die Resultate im Allgemeinen den Erwartungen so wenig entsprechen. Man hat daher in unserer Zeit schon mannichfache Versuche angestellt, um den mathematischen Unterricht auf Schulen mit den Forderungen der Zeit mehr in Einklang zu bringen. Man ist entweder von der alten Methode abgegangen oder hat sie mit neuen Elementen zu beleben gesucht. Doch schien es gefährlich, ganz neue Wege einzuschlagen und vielleicht auch das aufzuopfern, was

in der alten Methode besonders hervorzuleuchten schien; und so blieb man im Grunde doch immer beim Alten, das in seiner Weise einen anerkannten Werth hat.

Die folgenden Untersuchungen lehnen sich weder an die bisher versuchten Neuerungen, noch an die in der alten Schule gebräuchlichen Vorstellungen von analytischer und synthetischer Methode 2c. an; sie suchen ihr Resultat selbständig, einerseits auf das Wesen der Mathematik, andererseits auf den Zweck der Schulbildung zu gründen. Denn die Art der Behandlung eines Unterrichtsgegenstandes wird theils durch die Natur und das Wesen dieses Gegenstandes selbst bedingt, theils durch seine Bedeutung für den Zweck der Schule. So fordert jede Disciplin eine besondere Methode, die aus der wissenschaftlichen Beschaffenheit der Disziplin abzuleiten ist; und diese wird wiederum nach den Zwecken der Schule modifizirt werden. Sprachstudien müssen anders betrieben werden als Mathematik, Naturwissenschaft anders als Geschichte u. s. w.; ferner ist der Unterricht in jedem Fache wiederum ein anderer, je nachdem er der Universität angehört, wo die Wissenschaft als solche und in ihrer vollen Bedeutung mitgetheilt und fortgepflanzt werden soll, oder der Schule, die durch und in der Wissenschaft erziehen und die noch schlummernden Seelenkräfte erst entwickeln will.

Wenn man nach diesen beiden Seiten hin einerseits den Grund der Methode, der in dem Wesen der Wissenschaft liegt, andererseits den Zweck der Methode, der in dem Wesen der Schule liegt, deutlich erkannt hat: so ergibt sich daraus die Methode von selbst, freilich noch immer als allgemeine Form der Behandlung,

die dann nach individuellen Verhältnissen, nach der Natur des Lehrers, der Fähigkeit der Schüler, noch ein besonderes, ein individuelles Gepräge gewinnt. In der letzteren Beziehung ist es leicht begreiflich, ja es ist nothwendig, daß jeder tüchtige Lehrer sich selbst seine Methode schafft; und Anweisungen, die dem Lehrer jeden Schritt, jede Frage, jede Erklärung vorschreiben wollen, sind ebenso sehr verkehrt und überflüssig, als Lehrer, die sich durch eine solche Methodik binden lassen oder gar ihrer bedürfen, für unfähig und unfrei zu halten sind.

Wenn daher in den folgenden Abhandlungen die Methode des geometrischen Unterrichts untersucht werden soll, so wird es sich zunächst nur fragen, was in dieser Beziehung die Geometrie als Wissenschaft von den Raumgrößen fordert; dann wird zu erwägen sein, welche Ansprüche an die Methode die Schule als Erziehungsanstalt zu machen hat. Die Darstellung der Methode, die sich hieraus ergibt, wird aber nothwendig noch immer etwas Allgemeines sein, und es muß der Einsicht und dem Geschick des einzelnen Lehrers überlassen bleiben, der Methode beim Unterricht eine individuelle Gestalt zu geben und ihr das Leben und die Frische einzuhauchen, die einem allgemeinen Schema nothwendig fehlen müssen.

I.

Wissenschaftliche Begründung der Methode.

Es ist eine allgemeine Forderung der Wissenschaft, daß man zunächst den Gegenstand der Wissenschaft selbst ergründe, d. h., daß man die Ursache und Weise seines Daseins begreife, und seine Entstehung aus anerkannten Gründen und Bedingungen nachweise. Denn die Methode der Erkenntniß und Begründung beruht durchaus auf der Entstehungsweise des Dinges selbst. So ist z. B. die Methode der grammatischen Studien eine ganz andere geworden, seitdem man sich überzeugt hat, daß die Sprache nicht eine vom Menschen erfundene Kunst der Mittheilung, sondern eine nach nothwendigen Naturgesetzen entwickelte Funktion des menschlichen Organismus ist. Ebenso muß auch die Methode der Mathematik aus der Entstehung und dem Wesen der Raumgrößen abgeleitet werden. Die Mathematiker freilich nehmen den Raum und die Raumgrößen als etwas Gegebenes an und bemühen sich nicht, die Objekte ihrer

Wissenschaft philosophisch abzuleiten. In den meisten Lehrbüchern erscheinen daher Figuren und Körper als schon vorhandene, irgendwie überlieferte Wesen; sie werden beschrieben, unterschieden und benannt, wie man etwa in der Naturgeschichte Thiere oder Pflanzen beschreibt und benennt; höchstens wird noch ein Beweis hinzugefügt, daß man sich ein solches Raumgebild, wie es in der Definition beschrieben ist, denken könne. Die Philosophen dagegen haben zu allen Zeiten viel über das Wesen der geometrischen Größen gestritten; allein so lange man keine Vermittelung zwischen der Natur und dem Geiste annahm, so lange beide Gebiete durch eine undurchdringliche Scheidewand getrennt schienen, konnte man die Natur der Raumgrößen nicht begreifen. Der Zwiespalt zeigt sich schon bei Aristoteles, der sie sowol als Abstraktionen der Außenwelt, als auch als eigene Gebilde des Geistes auffaßt. Und allerdings ist die Geometrie mit ihren Gesetzen und Erscheinungen ebenso tief in das Walten der natürlichen Welt eingeprägt, als sie andererseits selbständiger und apriorischer Besitz des Menschengeistes ist. Den Alles beherrschenden Dualismus von Geist und Natur hat Trendelenburg («Logische Untersuchungen») durch den Grundbegriff der Bewegung zu vermitteln versucht, und dadurch auch auf das Wesen der Raumgrößen ein neues Licht geworfen. Nach seinen scharfsinnigen Untersuchungen über Entstehung und Wesen der mathematischen Größen*) kann man es als eine anerkannte

*) Logische Untersuchungen, namentlich im 5ten und 6ten Abschnitte, worauf wir um so dringender verweisen, da die

Wahrheit aussprechen, daß die Vorstellungen des Raumes sowol als der Raumgrößen aus der Bewegung abzuleiten sind. Die Bewegung ist die ursprüngliche und erste That der Natur, sie ist das Wesen des Geistes; sie erzeugt auf dieselbe Weise die Erscheinungsformen der Materie und die Anschauungsformen des Geistes. Daher kommt es, daß die Gesetze der Geometrie mit ebenso absoluter Nothwendigkeit im Bereiche der Natur herrschen, wie sie im Bereiche des Geistes erkannt werden. Da eine philosophische Begründung dieser Auffassung nach Trendelenburg's Untersuchungen, auf die wir wiederholt verweisen, überflüssig wäre, so begnügen wir uns mit einer einfachen Erläuterung des Satzes, daß alle geometrischen Größen durch Bewegung erzeugt werden.

Zunächst ist es deutlich, daß die ursprünglich formlose Materie nur durch eine schöpferische Bewegung Gestalt gewinnen kann. Die verschiedenen Kräfte, die in der Natur wirken, erzeugen nach nothwendigen Gesetzen die verschiedenen Gestalten der Dinge; daher die Naturwissenschaft fast nichts ist als angewandte Mathematik. Auch die Kunst schafft neue Gestalten nur durch Bewegung; es ist hier natürlich nur von der materiell schaffenden Kunst die Rede, bei der sich die geometrischen Elemente überall leicht erkennen lassen. Wie aber die Materie selbst nur durch räumliche Bewegung eine Gestalt gewinnen kann, so be-

---

dort entwickelten Vorstellungen die Grundlage der folgenden Untersuchungen bilden und da wir im Vertrauen auf die Verbreitung jenes Buches glauben, die philosophische Begründung sehr kurz fassen zu können.

ruhen auch die Vorstellungen von Gestalten und räumlichen Gebilden, die die menschliche Seele erfüllen, auf einer ganz analogen Thätigkeit der Seele.

Was zunächst die sinnliche Wahrnehmung betrifft, so könnte es freilich scheinen, als faßten wir, namentlich mit dem Auge, die Dinge und ihre Gestalten in der Ruhe auf. Allein das Auge fixirt im Grunde doch immer nur einen Punkt; wenn es in starrer Ruhe die Eindrücke der Außenwelt in sich aufnimmt, so gewinnen wir keine Anschauung der Gestalt und der Größe. Nur dadurch, daß wir das Auge über eine Linie, über eine Fläche hin und her laufen lassen, prägen wir uns ein Bild ein. Wir müssen die Größe der Bewegung und die Art der Bewegung, durch welche eine Gestalt geworden ist, mit dem äußeren Sinne nachbildend verfolgen, um sie uns anzueignen. Daß aber überhaupt die sinnliche Wahrnehmung auf einer, man kann sagen «nachahmenden» Bewegung des wahrnehmenden Organes beruht, das zeigt sich am deutlichsten da, wo wir das natürliche Organ mit schärfer beobachteten Instrumenten bewaffnen, z. B. beim Gebrauch des Fernrohrs, des Zirkels und anderer Meßwerkzeuge.

Endlich aber ist es auch deutlich, daß eine ähnliche Bewegung in der Seele vorgehen muß, wenn sie ohne sinnliche Wahrnehmung sich bestimmte Raumgebilde vorstellt. Wie das Auge nicht von einem Punkte zu einem andern überspringen kann, ohne den dazwischen liegenden Weg zu durchlaufen, wie es ein Bild von einer Figur nur dadurch gewinnt, daß es den Umfang derselben schnell überläuft, so ist auch die innere Anschauung nur dadurch möglich, daß die Seele

auf eine eigenthümliche Weise die Raumformen aus der Bewegung erzeugt. Man muß nämlich von der äußeren Anschauung, die durch die Sinne vermittelt wird, eine innere Anschauung unterscheiden, deren Träger die Phantasie ist, und die bekanntlich, wenn auch nicht in ihrer Entwickelung und Bildung, doch in ihrer ursprünglich schöpferischen Thätigkeit von der erfahrungsmäßigen Sinnenwahrnehmung ganz unabhängig ist. So kann der Mathematiker sich Größen oder Verbindungen von Größen vorstellen, die ihm in der Erfahrung nicht gegeben sind, die er also selber in seiner Seele erzeugt. Betrachtet man aber genauer den psychologischen Vorgang bei Bildung solcher apriorischer Anschauungen, so wird man stets die Grundanschauung der Bewegung als die eigentlich schaffende und formbildende Kraft erkennen, wie weiter unten ausführlicher nachgewiesen wird.

Die doppelte Natur der Raumgrößen und die selbständige Existenz derselben sowol im Gebiete der objektiven Natur als im menschlichen Geiste wird Niemand leugnen. Denn es ist deutlich, daß die mathematischen Gesetze, die sich z. B. im Planetensysteme oder in der Krystallbildung äußern, eine wirkliche Existenz auch ohne den Menschengeist haben, daß andererseits eine reiche Welt geometrischer Gebilde und Gesetze nur aus der Seele des Menschen entspringt. Die Einheit beider Gebiete läßt sich nur aus der für Geist und Natur gleichmäßig gesetzgebenden Bewegung begreifen. Ferner liegt es am Tage, daß die Geometrie als Wissenschaft zunächst nicht damit beginnen kann, die in der Natur objektiv gewordenen Gesetze zu erkennen und abzuleiten, da sie dann mit der Er-

fahrung und Beobachtung anfangen müßte, sondern daß sie rein aprioriſch verfährt, indem sie sich durchaus auf die innere Anschauung der Bewegung und der daraus erzeugten Gebilde beschränkt. Dies ist indessen keine Beschränkung, sondern darauf beruht die Macht der Wissenschaft. Während die in der Natur wirkende Bewegung überall den Widerstand der Materie zu überwinden hat, und in mannichfaltiger Weise den Eingriffen des Zufalles ausgesetzt ist, während also weder die Raumformen noch ihre Gesetze in der Außenwelt irgendwo in strenger Regelmäßigkeit erscheinen, schafft der Geist in ungehemmter Bewegung und freier Gesetzmäßigkeit sozusagen die Ideale, nach denen die Welt im Anfange erschaffen worden. So findet er in sich den Schlüssel, der ihm die oft räthselhaft verhüllten Erscheinungen der Natur eröffnet, so dringt er mit seinen eignen Konstruktionen in die für die Sinne unerreichbaren Räume des Weltalls und überwältigt mit kühner Hand die wild kämpfenden Elemente.

Wenn nun die Wissenschaft das ganz durchführen will, was ihr höchster Ruhm und ihr eigenthümlicher Werth ist, so muß sie sich durchaus auf ihrem eigenen Grunde auferbauen und in ihren Anfängen wie in ihrer weiteren Entwickelung ganz auf ihrem eigenen Gebiete bleiben. Da sie durchaus aprioriſch ist, so wird sie jede empiriſche Zuthat verschmähen und namentlich sich nicht auf die Erfahrung der sinnlichen Wahrnehmung stützen. Da sie ferner keine Begriffe, sondern räumliche Anschauungen zum Gegenstande hat, so wird sie nicht blos mit dem Verstande, sondern vorzüglich mit der mathematischen Phan-

tasie arbeiten müssen. Was endlich den Gang der Untersuchung betrifft, so muß er durchaus genetisch sein. Diese letztere Forderung ist in neuer Zeit schon oft ausgesprochen worden. Im Folgenden soll versucht werden, den Inhalt dieser Forderung möglichst erschöpfend darzulegen, wobei es sich von selber zeigen wird, in welcher Weise die mathematische Phantasie dem formalen Verstande gegenüber hervorgehoben zu werden verdient. In Bezug auf die Genesis der Geometrie sind zwei Hauptpunkte zu unterscheiden, nämlich die Erzeugung der Raumgrößen aus der Bewegung und die Ableitung ihrer Eigenschaften und Grundgesetze.

Was den ersten Punkt betrifft, so ist bekannt, daß die alte Methode sich um die Entstehung der Raumformen nicht kümmert, sondern sie als etwas äußerlich Gegebenes annimmt und durch Definitionen begriffsmäßig aufzufassen sucht. Nun sind uns freilich die einfachsten Gebilde, wie der Kreis, das Dreieck, das Viereck rc., allerdings durch die äußere Anschauung bekannt, sie sind uns gewissermaßen durch die Erfahrung als etwas Vorhandenes gegeben, und es scheint als könnte man sich begnügen, sie wissenschaftlich zu unterscheiden und zu ordnen. Allein im weiteren Verlaufe der Wissenschaft erscheinen Gestalten und Größen, die vorher unbekannt, ja gar nicht vorhanden waren, wie z. B. die Hyperbel; hier muß die Definiton in die Erzeugung der Raumgrößen eingehen. Denn da die erfahrungsmäßige Anschauung hier fehlt, so muß die Vorstellung der Größen erst selbst in uns erzeugt werden. Was aber bei den Größen nothwendig ist, die der Anschauung nicht vorliegen, das

fordert die Wissenschaft auch da, wo zufälligerweise die äußere Anschauung und Erfahrung zu Hülfe kommt; denn sie will ja durchaus apriorisch verfahren und muß also auch das, was wir durch Erfahrung uns schon angeeignet haben, von neuem in uns erzeugen. Die Entstehung der Raumformen beruht aber auf zwei Thätigkeiten der ursprünglich produktiven Vorstellungskraft, nämlich auf der Anschauung der Bewegung, wodurch zunächst die Elemente der Raumgrößen erzeugt werden, und auf der Anschauung der Kombination, durch welche aus diesen Elementen neue Gebilde entstehen. Ferner fordert die Wissenschaft, die nichts dem Zufall oder dem Einfall überläßt, daß beide Thätigkeiten nicht einseitig, sondern allseitig wirken, daß auch in der genetischen Ableitung der Raumgrößen selbst System sei. Es kann hier natürlich dieses System nicht in seiner Vollständigkeit entwickelt werden, zum Verständniß dessen, was unter einer systematischen Erzeugung der Raumgrößen zu verstehen ist, werden einige Andeutungen genügen.

Zunächst erzeugt die Bewegung eines Punktes die Linie; die Bewegung kann sehr verschiedener Art sein, und das Gesetz der erzeugenden Bewegung ist zugleich das Gesetz und die Definition der Linie. Das Hauptmoment der Bewegung, insofern sie räumlich aufgefaßt wird, ist die Richtung, und so ergibt sich der erste Unterschied der geraden und krummen Linien. Wo die Richtung sich beständig ändert, wie bei den krummen Linien: da muß das Gesetz dieser Aenderung ausgesprochen werden, wie es in der höheren Mathematik durch eine Gleichung oder auf

anderem Wege geschieht; und es ist bekannt, wie aus der Gleichung oder Definition einer Kurve, d. h. aus ihrem Bildungsgesetz, alle ihre Eigenschaften abgeleitet werden. Jede Linie kann ferner entweder als eine werdende oder als eine gewordene betrachtet werden. Faßt man nämlich das ganze Resultat der Bewegung, gleichsam den ganzen Weg, den der Punkt zurückgelegt hat, als etwas nun objektiv Existirendes auf, so hat man eine Linie im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Denkt man sich aber die Linie nur als den Ort, worin ein gewisser Punkt sich bewegt, also als beständig werdend und verschwindend, so gewinnt man die Vorstellung einer Ortslinie. Die Linie, in Bewegung gesetzt, erzeugt weitere Gebilde; die Art der Bewegung läßt sich nun schon anschaulich darstellen durch eine zweite Linie. Die Franzosen nennen jene génératrice, diese directrice; vielleicht finden die deutschen Namen Grundlinie und Leitlinie Beifall. Allein noch abgesehen von der unendlichen Mannichfaltigkeit der Leitlinien, d. h. der Wege, die die Grundlinie einschlagen kann, giebt es zwei wesentlich verschiedene Arten der Bewegung selbst. Entweder bewegt sich die Grundlinie so, daß sie selbst ihre Richtung nicht ändert, daß also alle ihre Punkte die von der Leitlinie angegebene Bewegung in gleichem Maße vollziehen, wie dies z. B. bei der Entstehung des Parallelogramms oder der Oberflächen von Prismen und Cylindern geschieht; oder aber ein Punkt der Grundlinie bleibt unbeweglich, die Grundlinie ändert also beständig ihre Richtung und jeder ihrer Punkte beschreibt einen ähnlichen Weg, wie die Leitlinie, wie z. B. bei Bildung der Kreis- und

Kugelfläche und des Kegelmantels der Fall ist. Im letzteren Falle muß man entweder sich auf solche Leitlinien, die überall von dem festen Punkte gleichweit entfernt sind, d. h. auf Kreise beschränken, wie bei allen Rotationsflächen; oder man muß sich die Grundlinie — wenn man so sagen darf — elastisch denken, so daß die einzelnen Punkte, deren Bewegung man verfolgt, auseinander oder zusammenrücken, je nachdem die Leitlinie sich vom festen Punkte entfernt oder ihm nähert; so entsteht z. B. das Dreieck, die Pyramidenoberfläche ꝛc. Wenn man diese Art der Bewegung im Allgemeinen eine drehende Bewegung nennen kann, so möchte sich die erstere Art vielleicht als parallele Bewegung bezeichnen lassen. Es ist ferner deutlich, daß man in beiden Fällen wiederum entweder nur die verschiedenen Lagen und Erscheinungen der Grundlinie ins Auge fassen, oder das ganze Resultat der Bewegung als Fläche zusammenfassen kann. Auf ganz analoge Weise kann man natürlich, weitergehend, aus der Bewegung der Fläche die verschiedenartigsten Körper und körperlichen Gebilde erzeugen.

So ergibt sich der schaffenden Phantasie eine leicht zu ordnende und doch unendliche Mannichfaltigkeit von Raumgebilden. Freilich nur die wenigsten sind bisher Gegenstand geometrischer Betrachtung geworden und haben als solche einen Namen erhalten, und gerade bei den einfachsten hat man das Bewußtsein von ihrer Entstehung aus der Bewegung ganz verloren. Allein wie alle Zahlengrößen nur durch bestimmte Operationen (Addiren, Multiplizиren ꝛc.) entstehen können und nur verstanden werden, insoweit

diese Entstehung erkannt wird: so müssen auch alle Raumgrößen aus der sie erzeugenden Bewegung begriffen werden.

Die Bewegung ist aber nicht allein wirksam, um aus dem Punkte die Linie, aus der Linie die Fläche rc. zu erzeugen; es gibt noch eine zweite Bewegung, die nur die gegebenen Größen verändert. Bleiben wir zunächst bei der geraden Linie, so kann sich entweder ihre Richtung, oder ihre Größe verändern. Dies führt zu zwei in der Geometrie sehr wesentlichen Begriffen, nämlich zu der Vorstellung des Winkels und des Verhältnisses. Wenn man durch drehende Bewegung die Richtung einer Linie ändert, so nennt man die Größe dieser Aenderung, den Richtungsunterschied, einen Winkel*). Nur durch die

*) Man stößt in neuerer Zeit oft auf eine Definition des Winkels, wonach er der unendliche Theil einer Ebene ist, der von zwei geraden Linien eingeschlossen wird. Es ist mir unbekannt, wer diese Definition erfunden hat; wahrscheinlich ist sie französischen Ursprungs, wenigstens finde ich sie bei Francoeur, Cours de mathématiques pures, No. 156: L'étendue infinie, comprise entre deux droites prolongées sans limites, est ce qu'on appelle un Angle. Diese Definition läßt sich natürlich auf scharfsinnige Weise vertheidigen und durchführen; allein das beweist noch nicht, daß sie naturgemäß und vernünftig sei. Namentlich aber, wenn man vom Unterrichte redet, muß sie entschieden verworfen werden; denn sie setzt nothwendig die Vorstellung von einem endlichen Verhältniß zweier unendlichen Größen voraus; eine Forderung, die der Fassungskraft der begabtesten Schüler zu viel zumuthet. Die Euklidische Definition (γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις) führt auf den Begriff der Drehung (κλίνειν), sie ist die einzig richtige.

drehende Bewegung, die erforderlich ist, um einen Schenkel in die Richtung des andern zu bringen, läßt sich der Winkel begreifen. An dieser Entstehung des Winkels muß man festhalten, darauf alle Sätze über Winkel zurückführen; und wo man einen Winkel findet, muß die Phantasie zu dem starrgewordenen Resultat die erzeugende Drehung hinzudenken.

Verändert sich die Größe einer Linie (bei Flächen und Körpern verhält es sich ganz analog), so nennt man die Größe der Veränderung ihr Verhältniß. Man führt gewöhnlich das Verhältniß auf den Begriff der Vergleichung zurück; allein sobald die Vergleichung ein genaues Resultat geben soll, muß man immer untersuchen, wie groß die Ungleichheit sei, und die Arithmetik zeigt schon, daß man dabei verschiedene Wege einschlagen kann, je nachdem man das Verhältniß auf die Differenz oder auf den Quotienten der zwei Größen zurückführt, d. h. je nachdem man sich vorstellt, die Ungleichheit sei durch Addition oder durch Multiplikation entstanden; man betrachtet also das zweite Glied des Verhältnisses als eine Veränderung des ersten, und zwar bei den sogenannten geometrischen Verhältnissen, auf die es hier allein ankommt, als ein Vielfaches des ersten. Ein Verhältniß zweier Zahlen ist also die Weise, wie eine Zahl durch Multiplikation aus einer andern entstanden ist. Diesen arithmetischen Begriff des Verhältnisses hat man nun auch in die Geometrie eingeführt, und bei der fundamentalen Einheit der beiden Zweige der Mathematik läßt sich dagegen nichts einwenden. Jedoch darf die Geometrie nicht unterlassen, den Begriff des Verhältnisses selbständig abzuleiten.

In dem Leitfaden §. 3, 4 ist eine Ableitung gegeben, die sich noch unmittelbar an die Zahlenlehre anschließt; man setzt dabei eine Entstehungsweise der Linien aus einander in derselben Weise voraus, wie Zahlen aus einander entstehen; allein bekanntlich ergibt sich bei dieser Behandlungsweise sogleich die Schwierigkeit, daß man auf irrationale Verhältnisse stößt, und dadurch wird es nothwendig, wie es in den meisten Lehrbüchern geschieht, für viele Sätze zwei Beweise zu geben, einen für rationale und einen für irrationale Verhältnisse. Bei irrationalen Verhältnissen aber kann der Beweis nur indirekt geführt werden, und solche Beweise sind bei einer genetischen Behandlung gar nicht zulässig, wovon weiter unten gesprochen werden soll. Offenbar aber beruht die Irrationalität nur auf dem Unterschiede der kontinuirlichen und diskreten Größen, d. h. auf der Unmöglichkeit, jene durch diese zu ersetzen; sie tritt also erst da ein, wo man aus dem Gebiete der Geometrie in das der Arithmetik übergeht, d. h. wo man die geometrischen Größen durch Zahlen ausdrückt. — Es fragt sich nun, ob es nicht möglich ist, die Geometrie ganz selbständig zu behandeln, oder wenigstens die Elemente ganz von Uebergriffen in die Arithmetik zu befreien; dazu wäre es vor allen Dingen nothwendig, eine rein geometrische Behandlung der Verhältnißlehre durchzuführen. Die Schwierigkeit beruht offenbar darin, die geometrische Operation zu finden, welche der bei Erzeugung eines Zahlenverhältnisses wirkenden Multiplikation entspricht. Es ist im Allgemeinen die veränderte Bewegung. Wenn z. B. zwei Rechtecke von gleicher Grundlinie verschiedene Höhen ha-

ben, so ist es klar, daß das größere Rechteck aus dem kleinern ebenso durch eine einfache Bewegung entstanden gedacht werden kann, wie die größere Höhe aus der kleineren, daß also die Rechtecke sich ebenso verhalten müssen, wie ihre Höhen. Allein offenbar beruht das Verhältniß der Größen nicht blos auf dem Maße der verändernden Bewegung, sondern auf dem Verhältniß der verändernden Bewegung zu der ursprünglich erzeugenden, und so würde sich die Definition nur im Kreise herumdrehen. Es muß ein geometrisches Mittel geben, die Größe des Verhältnisses zweier Bewegungen wenigstens so weit zu bestimmen, daß man die Gleichheit zweier Verhältnisse erkennen kann; und dieses Mittel ergibt sich aus der Betrachtung der Winkel. Wenn man nämlich eine Linie bei der drehenden Bewegung so wachsen läßt, daß ihr Endpunkt eine auf der ursprünglichen Lage der Linie perpendikuläre Linie erzeugt, so ist die veränderliche Linie bekanntlich eine Funktion (secans) des Drehungswinkels; sie wird durch die Winkeldrehung aus der ursprünglichen Linie erzeugt. Nimmt man nun mit Grundlinien von verschiedener Größe dieselbe Operation vor, so muß, wenn die Ursache der Zunahme, d. h. der Winkel, gleich groß ist, auch die Wirkung dieselbe sein; d. h. das durch die Bewegung erzeugte Linienverhältniß ist bei gleichen Winkeln dasselbe. So ließe sich vielleicht die Lehre von den Verhältnissen der Linien auf die Anschauung gründen, daß aus einer Linie andere vermittelst der Winkeldrehung erzeugt werden. Natürlich dürfte man sich nicht auf die eine hier angegebene Entstehungsweise beschränken, sondern müßte ganz allgemein die Veränderung der

Linien als Funktionen der Winkel behandeln. Man wird einwenden, daß bei dieser Ableitung des Begriffes eines Verhältnisses die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke vorausgesetzt werde, die doch erst durch die Proportionen begründet wird. Freilich ergibt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke ebenso unmittelbar, wenn man betrachtet, wie überhaupt eine Gestalt durch Winkel gebildet wird; und sie liegt somit schon in dieser Ableitung der Verhältnißlehre. Allein man vergesse doch nicht, daß es nicht bloß Aufgabe einer wissenschaftlichen Behandlung ist, die Wahrheit ihrer Lehren gegen jeden Zweifel zu schützen, namentlich wo gar kein Zweifel mehr denkbar ist, wie in der Mathematik; die Wissenschaft muß auch überall in das Wesen und den schaffenden Grund der Dinge eindringen, sie muß ihre Gesetze nicht bloß zur Anerkennung bringen, sondern auch begreifen lehren. Nun ist aber die Vorstellung, daß Linien aus einander vermittelst der Winkeldrehung entstehen, in der weiteren Entwickelung der Mathematik eine der wichtigsten Grundanschauungen; darauf beruht die ganze Trigonometrie, die freilich bisher auch auf eine mehr künstliche als natürliche Weise abgeleitet worden ist; darauf beruhen die wichtigsten Lehren der Mechanik, und so viele andere der lehrreichsten Sätze. Man darf sich daher nicht damit begnügen, diese Erscheinung zu beweisen; es muß auch für eine in der Geometrie so wesentliche Vorstellung eine rein geometrische Begründung geben. Freilich müßte die hier nur kurz angedeutete Auffassung streng wissenschaftlich durchgeführt werden, wozu hier nicht der Ort ist.

Wenn man, wie im Vorhergehenden entwickelt ist, die Bewegung zum schöpferischen Prinzip der Raumgrößen macht, und die Richtung als das eine Hauptelement in der Bewegung anerkennt, so wird man nothwendig auch auf den Gegensatz der Richtung und somit auf das Positive und Negative geführt. Ueber die Natur des Negativen hat man viel gestritten, ob es etwas Reelles, eine besondere Art von Größen sei, oder nur eine relative Auffassung der absoluten Größe. In neuerer Zeit faßt man die negativen Größen in der Arithmetik oft nur als Resultat einer Subtraktion auf und nennt sie daher auch subtraktive Größen. In der niederen Geometrie sucht man vergebens nach negativen Größen; und da man bisher alle geometrischen Größen nur in ihrer starren Existenz, nicht in ihrem Werden und in ihrer Veränderung beobachtete, so konnte auch von negativen Größen kaum die Rede sein. Nun läßt sich aber ein so wesentliches Element nicht aus der Wissenschaft ganz hinwegbannen; das anfangs verheimlichte Negative tritt in der Trigonometrie und noch mehr in der höheren Geometrie wieder in seine Rechte ein; und freilich kann dann die arithmetische Negation auch die geometrischen Erscheinungen nothdürftig erklären. Allein warum verkennt man ganz den Ursprung der negativen Größen? warum beachtet man sie nicht schon in den Anfängen der Wissenschaft, in deren weiterem Verlauf sie eine so wichtige Rolle spielen? Von dem pädagogischen Fehler, den man begeht, wenn man erst die negative Zahl und dann die negative Linie erläutert, soll später die Rede sein. Hier muß der Begriff des Negativen entwickelt und

die Nothwendigkeit, ihn in die Geometrie einzuführen, dargethan werden.

Zunächst ist deutlich, daß das mathematische Negative mit der grammatischen Negation nichts zu thun hat; schon Aristoteles hat auf den Unterschied der bloßen Verneinung (*ἀντίφασις, ἀντιφατικῶς ἀντικείμενον*) und des Gegensatzes (*ἐναντίον, ἐναντίως ἀντικείμενον*) aufmerksam gemacht. Jene ist eine bloße Aufhebung des Urtheils, die an die Stelle des Negirten nichts Neues setzt. Durch den Gegensatz aber wird, wie schon das Wort andeutet, dem Einen etwas Anderes entgegengesetzt. Beide Glieder des Gegensatzes haben für sich genommen gleiche absolute Gültigkeit und Existenz; sie sind somit beide an sich positiv; nur durch den geistigen Akt des Setzens und Gegensetzens wird das Eine zum Entgegengesetzten. Somit kann man freilich auch in der Betrachtung der Dinge Gegensätze finden; allein bei genauerer Betrachtung wird es sich finden, daß eigentlich nicht die Dinge an sich einander entgegengesetzt sind, sondern ihre Kräfte, ihre Thätigkeiten, und daß das Wesen der entgegengesetzten Thätigkeiten darin besteht, daß sie sich in ihren Wirkungen aufheben, neutralisiren. So ist z. B. die Finsterniß nicht der Gegensatz des Lichtes, weil sie das Licht nicht aufhebt; Finsterniß ist nur eine Verneinung, ein Mangel. Dagegen positive und negative Elektrizität sind so einander entgegengesetzt, daß ihre eigenthümlichen Wirkungen verschwinden, sobald beide mit einander in Berührung kommen. Wie es aber in der Natur entgegengesetzte Kräfte gibt, so bietet auch das Menschenleben Beispiele von Thätigkeiten dar, die sich in ihren

Wirkungen aufheben, z. B. Gewinnen und Verlieren, Nehmen und Geben, Kommen und Gehen. Hier ist jedes, für sich genommen, eine absolut wirkende That; allein sobald es, unter sonst gleichen Umständen, mit seinem Gegensatze zusammenkommt, wird seine Wirkung wieder vernichtet. — Eben solche entgegengesetzte Thätigkeiten nun sind auch die mathematischen Grundoperationen, namentlich in der Geometrie die erzeugenden Bewegungen, sobald sie in durchaus entgegengesetzten Richtungen wirken; in der Arithmetik aber sind Zuzählen und Abzählen, Addiren und Subtrahiren, Multipliziren und Dividiren, Potenziren und Wurzelziehen ebensolche entgegengesetzte Thätigkeiten, die sich in ihren Wirkungen vernichten. Man sollte daher ursprünglich nicht von entgegengesetzten Größen reden, sondern von entgegengesetzten Thätigkeiten. Denn die Größen sind nur die Wirkungen der Thätigkeiten; der Gegensatz liegt nicht als haftende Eigenschaft in den Dingen, sondern gründet sich nur auf die entgegengesetzt wirkenden Kräfte der Thätigkeiten. So sind z. B., um mich eines ganz trivialen Beispiels zu bedienen, hundert Thaler, für sich betrachtet, weder positiv noch negativ; nur insofern der Eine sie gewonnen, der Andere sie verloren, sind sie für den Einen positiv, für den Andern negativ. So ist also die ganze Lehre vom Gegensatze auch nur ein Produkt des betrachtenden, vergleichenden Geistes, der bei den entgegengesetzten Thätigkeiten die eine — es ist zunächst gleichgültig, welche — als die ursprünglich wirkende setzt, ponirt und somit positiv nennt, und die entgegengesetzte als solche, d. h. nur in ihrem Gegensatze gegen die positive, als die vernichtende an-

sieht und negativ nennt. Erst ein zweiter Schritt führt dahin, daß man die den entgegengesetzten Thätigkeiten entsprechenden Wirkungen, die dadurch erzeugte Größe auch als positive und negative unterscheidet. Jedoch muß dabei immer jene Entstehung des Gegensatzes berücksichtigt werden; denn sonst kann man den Widerspruch nicht erklären, daß etwas zugleich negativ und positiv sein kann.

Lassen wir den Gegensatz, wie er in der Arithmetik erscheint, hier unberücksichtigt, und gehen zur Betrachtung des Negativen in der Geometrie über, so ist es deutlich, daß, wo eine räumliche Bewegung gedacht wird, sogleich eine entgegengesetzte Bewegung mit gedacht werden kann; und man bezeichnet jene als positiv, diese als negativ. Stellt man die Wirkungen räumlicher Bewegung als Raumgrößen dar, oder bezeichnet man sie durch Zahlen, so ergeben sich die positiven und negativen Größen, und zwar nicht bloß Zahlen, sondern auch Linien, Winkel, Flächen und Körper.

Bei dieser Entstehung des räumlich Negativen ist jedoch ein wesentlicher Unterschied nicht zu übersehen. Bei der Betrachtung der Raumgrößen muß man nämlich von drei Hauptgesichtspunkten ausgehen; man untersucht die Gestalt, d. h. Art und Weise der räumlichen Ausdehnung, oder die Größe, d. h. das Maß der Ausdehnung, oder endlich die Lage, den Ort, wo etwas sich befindet. In den Gestalten ist mannichfaltige Verschiedenheit, aber kein reiner Gegensatz, wenn man nicht die Symmetrie als solchen ansehen will; wenigstens läßt sie sich sehr gut aus dem Gegensatz der Lage ableiten. Der Gegensatz der

Lage bei Bestimmung von Punkten ist schon lange in der Geometrie anerkannt und durch plus und minus bezeichnet worden. Man bestimmt nämlich (durch Koordinaten) die Größe der Bewegung, die erforderlich ist, um von einem allgemein angenommenen Anfangspunkt zu den Punkten zu gelangen, die man bestimmen will, und bezeichnet in den Hauptdimensionen den Gegensatz der Richtungen von dem Anfangspunkt an durch + und —. So unterscheidet man z. B. in der Lehre von den Kegelschnitten positive und negative Ordinaten und Abscissen; so nimmt der Feldmesser die Entfernungen nach Süden und nach Westen hin als positiv, dagegen die nach Norden und nach Osten als negativ an. In derselben Weise kann man auch positive und negative Winkeldrehung unterscheiden, wie z. B. die nördlichen und südlichen Breitengrade durch entgegengesetzte Drehung des Radius eines Meridiankreises bestimmt werden. Durch diesen Gegensatz der Lage wird der ganze Raum nach seinen verschiedenen Ausdehnungen gewissermaßen in je zwei Gebiete getheilt, und es ist dabei durchaus gleichgültig, welches als positiv anzunehmen ist.

Von diesem Gegensatze etwas verschieden, wiewol auf derselben Grundvorstellung ruhend, ist der Gegensatz der Größe. Wenn nämlich bei irgend einer Bewegung eine Raumgröße zunimmt, so muß sie bei entgegengesetzter Bewegung abnehmen und umgekehrt. Hier muß man nun die jeder besonderen Größe eigenthümliche Richtung der erzeugenden Bewegung als positiv und die entgegengesetzte als negativ annehmen. Es sind hier also nicht zwei entgegengesetzte Gebiete,

sondern nur zwei entgegengesetzte **Richtungen** zu unterscheiden. Ein Beispiel aus der Geometrie wird dies erläutern*) (vergl. Leitfaden §. 63 u. ff.) Wenn man in einem spitzwinkligen Dreiecke eine Höhe zieht, so wird der Winkel an der Spitze in zwei Winkel und die gegenüberliegende Grundseite in zwei Abschnitte zerlegt. Bewegt man nun die Spitze so hin und her, daß bald der eine, bald der andere Winkel an der Grundseite zunimmt, so wird jedesmal der daranliegende Abschnitt abnehmen und endlich ganz verschwinden, sobald einer dieser Winkel ein rechter wird; wird der Winkel stumpf, so fällt die Höhe nach außen, und die Verlängerung der Grundseite bildet den einen Abschnitt. Hier ist offenbar für jeden Abschnitt als solchen die Richtung von der daranliegenden Ecke nach der andern Ecke als die ursprüngliche anzusehen; wenn der Fußpunkt der Höhe sich in dieser Richtung bewegt, so nimmt der Abschnitt zu, im Gegentheil nimmt er ab, verschwindet und wird endlich **negativ**, während der andere Abschnitt größer geworden ist als die Grundseite selbst. Ebenso geht es mit den Winkeln an der Spitze, ebenso mit den ganzen durch die Höhe gebildeten rechtwinkeligen Dreiecken; das stumpfwinkelige Dreieck wird in zwei rechtwinkelige zerlegt, von denen das eine negativ ist, eine negative Grundseite und einen negativen Winkel hat. — Daß dies Verhältnisse sind, die nicht allein überall in der Geometrie wiederkehren, sondern auch

---

*) Die elementare Erscheinung dieses Gegensatzes, wie sie im Leitfaden §§. 2, 3, 6, 7 angedeutet ist, bedarf wol keiner Erläuterung.

für eine wirkliche Einsicht in die Natur geometrischer Gebilde ganz unentbehrlich sind, das ist wol deutlich. Man wird es daher dem Verfasser nicht verargen, wenn er eine so bedeutende Neuerung gewagt und den Begriff des Negativen, auf die Anschauung des Gegensatzes räumlicher Bewegung gegründet, als ein wesentliches Moment in die Elemente der Geometrie eingeführt hat. Der praktische Vortheil für den weiteren Verlauf des Unterrichts ist kaum zu ermessen. Namentlich aber wird jeder Lehrer, der den Versuch macht, finden, daß die Schüler die negativen Größen viel leichter auf geometrischem als auf arithmetischem Wege begreifen.

Wenn man die Resultate einfacher Bewegungen, wie sie im Obigen dargestellt sind, als Festgewordenes auffaßt, so ergeben sich die Elemente aller Raumgrößen, nämlich, um bei der niederen ebenen Geometrie zu bleiben, die gerade Linie, der Kreis, das Parallelogramm und das Dreieck. Als zweite wesentliche Weise der Formbildung ist oben die verbindende Kombination bezeichnet worden. Indem nämlich jene Elemente auf mannigfaltige Weise verknüpft und zu neuen Einheiten verbunden werden, entwickeln sich wiederum eine unendliche Menge neuer Gebilde und Erscheinungen. Zunächst ergibt sich so die Vorstellung der Verbindungslinie, durch welche zwei auseinander liegende Punkte verknüpft und in Beziehung zu einander gesetzt werden; hierzu paßt die alte Definition der Linie als des kürzesten Weges zwischen zwei Punkten, die somit freilich eine Berechtigung findet, aber doch nur einen sekundären Werth hat. Denkt man sich ferner mehrere Punkte

unter einander zu Einem Gebilde verknüpft, so entstehen Figuren (Dreieck, Viereck ꝛc.) Auf ganz entsprechende Weise führt die Kombination zweier Linien zur Vorstellung des Durchschnittspunktes, und weiter, wenn mehrere Linien verknüpft und als Einheit aufgefaßt werden, zu jenen Figuren, die man nach Steiner's Vorgang Dreiseit, Vierseit ꝛc. nennt. Beide Arten von Figuren sind ferner entweder vollständig oder einfach (Leitfaden §. 22 und 23). Weiter werden die so entstehenden Figuren wiederum mit geraden Linien in Beziehung gesetzt, und es entstehen Transversalen, Diagonalen, Sekanten, Tangenten u. s. w. Es ist bekannt, daß gerade derartige Kombination zu den interessantesten und lehrreichsten Sätzen führt und auf das Wesen der geometrischen Größen ein bedeutendes Licht wirft. Denn nur durch diese kombinatorisch produktive Thätigkeit werden zusammengesetzte Erscheinungen wiederum auf jene einfachen Elemente zurückgeführt, indem verwickelte Figuren in Dreiecke zerlegt, Punkte, deren Beziehung man kennen lernen will, durch Linien verbunden werden u. s. w. Alles, was man Hülfslinien oder Hülfskonstruktionen nennt, ist nichts als eine Aeußerung dieser zweiten Thätigkeit der produktiven Phantasie, durch welche wir uns vom Bekannten zum Unbekannten eine bequeme Brücke schlagen.

Wenn die hier gegebenen Andeutungen über die Entstehung der Raumgrößen auch noch sehr lückenhaft sind, so wird doch deutlich sein, in welcher Weise alle Raumgrößen durch eine zwiefache Thätigkeit der schöpferischen Phantasie erzeugt werden, nämlich durch Anschauung einer ursprünglich schaffenden Bewegung

und durch Kombination der einfachen Elemente. Ferner wird es einleuchten, daß die Definition einer Größe, wenn sie wissenschaftlich sein soll, nicht bloß eine äußerliche Beschreibung enthalten, sondern durch Angabe der eigenthümlichen Erzeugungsweise das Wesen der Größe enthüllen muß. Hierüber wird weiter unten noch gesprochen werden müssen. Hier ist noch ein wichtiger Punkt zu erledigen. Es fragt sich nämlich, ob man für jede Größe nur Eine Definition als die allein gültige annehmen solle, oder ob die Wissenschaft es gestatten könne, je nach dem Bedürfnisse deren mehrere aufzustellen und in ihren Konsequenzen zu verfolgen. Man wird geneigt sein, dieses Letztere zu verneinen und mit Strenge auf die Einheit der Definition zu dringen, da sie ja das Wesen des Dinges aussprechen soll, und das Wesen eines Dinges doch nur ein einiges sein kann. Allein wenn man bedenkt, daß nach dem Vorhergehenden das Wesen der Raumgrößen auf ihrer Erzeugung durch Bewegung beruht, daß also die Definition nur aussprechen soll, wie eine Größe entstanden ist, so wird man zugeben müssen, daß eine Raumgröße, die sich auf verschiedene Weise erzeugen läßt, auch verschiedene Definitionen zulassen muß. So z. B. entsteht der Kreis einerseits dadurch, daß eine gerade Linie sich um ihren Endpunkt dreht; andererseits aber ist er auch eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten. Dergleichen Beispiele lassen sich in großer Menge anführen. Nur muß, wie das beim Kreise offenbar der Fall ist, eine innere Einheit die verschiedenen Definitionen wiederum verknüpfen; und wo diese innere Einheit nicht am Tage liegt, z. B. bei den Kegel-

schnitten, die entweder aus dem Kegel abgeleitet, oder als Ortslinien betrachtet, oder durch eine Gleichung definirt werden, da muß sie natürlich nachgewiesen werden. Namentlich aber hüte man sich, jeden Lehrsatz, jede, wenn auch wesentliche Eigenschaft sofort zu einer Definition zu erheben; man würde alsdann allen festen Boden unter den Füßen verlieren. Wenn man es sich zur Regel macht, die einfachste, natürlichste Entstehungsweise aufzusuchen, so wird man stets das Richtige treffen. So z. B. definirt man die Parallelen als Linien, die in einer Ebene liegend und beliebig verlängert sich nicht schneiden; diese Definition hat fast nur einen negativen Inhalt und gibt also keine lebendige Anschauung; überdies setzt sie eine unendliche Verlängerung voraus und führt somit gleich auf ein sehr gefährliches Gebiet. Endlich muß man ja auch einen Parallelismus krummer Linien annehmen, der nur auf sehr künstliche Weise auf diese Definition zurückgeführt werden kann. Daher ist diese Definition entschieden zu verwerfen. Man muß die Parallelen durchaus auf die gleiche Richtung zweier Bewegungen zurückführen und daraus auch die Eigenschaften paralleler Linien ableiten. Ein anderes Beispiel einer verfehlten Definition gibt die regelmäßige Figur. Man sagt gewöhnlich, eine Figur sei regelmäßig, wenn sie lauter gleiche Seiten und Winkel habe. Wollte man nach dieser Definition sich eine Figur vorstellen oder zeichnen, so müßte man zuvor schon eine Reihe regelmäßig liegender Punkte haben, d. h. man müßte eben die Figur schon haben. Es ist aber offenbar, daß für die Zeichnung einer regelmäßigen Figur zunächst eine Anzahl unter gleichen

Winkeln auslaufender Strahlen erforderlich ist, daß man dann die Strahlen gleich lang zu machen und ihre Endpunkte zu verbinden hat (Leitfaden §. 26). Ist dies die naturgemäße Entstehung einer regelmäßigen Figur, so muß sie auch in der Definition ausgesprochen werden, und man wird sagen müssen, regelmäßige Figuren seien Figuren, deren Strahlenwinkel und Strahlen gleich sind. Daß diese Definition die richtige ist, ergibt sich auch daraus, daß einerseits die Haupteigenschaften der regelmäßigen Figur sich daraus auf viel leichtere Weise entwickeln lassen, und daß andererseits der Uebergang zum Kreis als einer regelmäßigen Figur von unendlich vielen Strahlen nichts Gewaltsames mehr hat. — So ist es deutlich, daß es allerdings verschiedene Definitionen für dieselbe Größe geben kann, aber nur insofern sie auf verschiedene Weise erzeugt werden kann. Wenn nun die Thätigkeit der Phantasie, wodurch die verschiedenen Raumformen erzeugt werden, geregelt und mit klarem Bewußtsein fortschreitet, so ergeben sich überall, wie von selbst, die einfachsten und anschaulichsten Definitionen.

Nach diesen Andeutungen über die Genesis der Raumformen gehen wir zum zweiten Punkte über, nämlich zur Ableitung der geometrischen Gesetze, und fragen, wie die wissenschaftliche Thätigkeit beschaffen sein müsse, durch welche die wesentlichen Eigenschaften der Raumgrößen erkannt werden. Die Genesis der Raumformen stellt uns zunächst nur die Objekte dar, deren Natur und Eigenschaften nun die eigentlich wissenschaftliche Betrachtung erforschen soll. Wenn aber die Methode der mathematischen Erkennt-

niß geprüft werden soll, so sind zunächst zwei verschiedene Zwecke zu unterscheiden, die die Wissenschaft verfolgt. Einerseits ist die Wissenschaft bemüht, in umfassender Weise alle Eigenschaften und Beziehungen der Dinge als sichere Resultate und unzweifelhafte Wahrheiten aufzustellen; in dieser Richtung legt sie den größten Werth auf die Entdeckung neuer Gesetze und auf den Beweis, daß diese Gesetze nothwendig sind und allgemeine Gültigkeit haben. — Andererseits aber begnügt sich die Wissenschaft nicht mit Erweiterung ihres Gebietes und Sicherstellung ihres Besitzes; sie will auch den inneren Zusammenhang der Erscheinungen begreifen und ihren gesammten Inhalt systematisch darstellen. In den übrigen Wissenschaften unterscheidet man diese beiden Wege der Untersuchung als den historischen und den philosophischen; in der Mathematik ist ein ganz ähnlicher Gegensatz, den das folgende Beispiel hinreichend darstellen wird. Bekanntlich entdeckte Newton den Binomischen Lehrsatz, indem er mit dem ihm eigenthümlichen genialen Blick nach der Analogie in den ersten Potenzen des Binoms $a + b$ ein allgemeines Gesetz über die Folge der Koeffizienten und Exponenten aufstellte, und dann die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes für jede Potenz mit großem Scharfsinne bewies; er zeigte nämlich, daß wenn eine beliebige Potenz von $a + b$ die in der Formel ausgesprochene Form hat, auch die folgende Potenz die entsprechende Form haben muß. Nun konnte man sich freilich auf die Gültigkeit dieses Gesetzes verlassen, und es als Basis für weitere Operationen anwenden. Allein damit hatte man noch keine Einsicht in den Grund

des Gesetzes; es war bewiesen, aber noch nicht abgeleitet. Somit konnte sich der philosophische Trieb der Wissenschaft noch nicht befriedigen; er suchte weiter nach der Entstehung des Gesetzes. Diese beruht bekanntlich auf der Lehre von den Kombinationen (vergl. z. B. Tellkampf, Vorschule der Mathematik §. 170). Nachdem es aber so gelungen war, Einsicht in die Entstehung des Gesetzes zu gewinnen, nachdem man das Gesetz als eine nothwendige Folge aus der Kombinationslehre abgeleitet hatte, bedurfte es keines Beweises mehr. — Nun ist es deutlich, daß die erfindende oder entdeckende Mathematik ganz andere geistige Hebel anwenden muß, als die philosophisch ableitende. Jene bedarf zunächst des genialen Blickes, um nach Analogien oder auf sonstige räthselhafte Weise neue Gesetze zu entdecken; dann muß, was fürs Erste noch Hypothese war, durch einen Beweis zu apodiktischer Wahrheit erhoben werden. Wie der Beweis beschaffen sei, ist ganz gleichgültig, wenn er nur Beweiskraft hat und auf solchen Gesetzen beruht, die auch schon als apodiktische Wahrheiten erkannt sind. Was namentlich die Methode der Begründung betrifft, so hat die Wissenschaft zwar äußerlich sehr bestimmte und strenge Formen ausgebildet; allein wer der Sache auf den Grund geht, findet doch überall eine große Willkühr und Unbestimmtheit. Dies kommt daher, daß man in der Regel zunächst nur das Faktum als unwiderleglich festzustellen sich bemühte, und ohne den Realgrund aufzusuchen, sich damit begnügte, einen Erkenntnißgrund aufzufinden. Da nun der innige und gegenseitige Kausalnexus, der alle mathematischen Er-

scheinungen verknüpft, für jeden Satz die mannigfaltigsten Beweismittel darbietet, so findet man bald diesen bald jenen Gang eingeschlagen. So werden oft für die einfachsten Sätze die weitläufigsten und spitzfindigsten Beweise aufgesucht, die dann oft den Eindruck einer Taschenspielerei machen. Namentlich aber gehören in die Klasse der Beweise, die nur das Faktum bestätigen, ohne eine Einsicht in das Wesen zu geben, die sogenannten indirekten Beweise, da man nachweist, daß jede vom Lehrsatze abweichende Behauptung zu absurden Konsequenzen führt. — Daß die Mathematik mit diesen Mitteln Großes geleistet hat und noch leistet, daß man mit scharfsinnigen Einfällen und auf listigen Umwegen oft weiter in die noch unbekannten Gebiete der Wissenschaft vordringen kann, als bei einer konsequent fortschreitenden Ableitung auf direktem Wege, das soll nicht geleugnet werden. Allein ebenso deutlich ist es, daß jene Methode nicht das Höchste in der Wissenschaft ist, daß die Mathematik nur durch philosophische Behandlung, durch Begründung aus dem Begriffe der Sache selbst, durch eine wahrhaft systematische Darstellung zu einer wahren Wissenschaft im neueren Sinne des Wortes erhoben werden kann.

Daß die Mathematik in dieser Beziehung noch viel zu wünschen übrig läßt, so sehr auch in neuerer Zeit schon auf diesen höchsten Zweck hingearbeitet ist, das liegt am Tage*). Daß aber namentlich die Ele-

---

*) Es sei erlaubt, als Autorität für diese Behauptung die Worte eines Mannes anzuführen, der als Mathematiker wie als Pädagog gleich große Beachtung verdient, und überdies

mente der Geometrie, um die der gelehrte Mathematiker sich natürlich wenig kümmert, einer Umgestal-

---

als einer der besonnensten Philosophen bekannt ist. Herbart sagt in seinem ABC der Anschauung, 2. Aufl. S. 48: Was das Verhältniß der Mathematik zum Verstande betrifft: so mag die große Wissenschaft es ihrem Verehrer verzeihen, wenn er sie hier noch nicht so vollkommen findet, wie sie zur Bildung der Geister — ihrem edelsten Beruf, — es in der That werden muß. Nicht an Umfang, noch an Gewißheit und Bündigkeit fehlt es ihr dazu, aber an systematischer Eleganz, und an philosophischer Durchsichtigkeit. Jeder Mangel hierin macht sich beim pädagogischen Gebrauche aufs Unangenehmste fühlbar, aufs Nachtheiligste wichtig, — da es für diesen Gebrauch nicht auf die Resultate, noch auf ihre Zuverlässigkeit, sondern auf das Denken selbst, und auf dessen musterhaften Gang ankommt.

Das strenge speculative Denken leidet keine Willkührlichkeiten. Nicht mehr noch weniger soll es enthalten, als was gerade nöthig ist, um die innere Nothwendigkeit des vorliegenden Lehrsatzes ganz und unmittelbar zu durchschauen. — Alle Willkührlichkeiten sind Individualitäten der Erfinder und Lehrer, sie halten die allgemeine Mittheilung auf, und sind ihrer nicht werth.

Die mathematische Analysis erlaubt sich jeden Augenblick Bequemlichkeiten, welche eine präcise Methode sich unmöglich gestatten kann. Einen Satz durch Auflösung der Begriffe (Analysis) beweisen, heißt, sich durch die gegebenen Begriffe selbst hintreiben lassen zu denen, welche die innere Nothwendigkeit des Satzes enthalten. Diese Nothwendigkeit liegt aber nicht in willkührlichen Hülfslinien, oder willkührlichen Rechnungen; sie ist überhaupt nicht entdeckt, so lange es zwei oder mehrere Beweise giebt, welche die Sache gleich deutlich machen. Und das, wozu die gegebenen Begriffe hintreiben, was sie herbeifordern können, ist gewiß nur das, was nothwendig und wesentlich zur Natur des Lehrsatzes gehört;

tung und wissenschaftlicheren Behandlung bedürfen, darüber muß hier einiges gesagt werden. Bekannt-

---

aber darum ist auch das nicht Analysis, was die Willkührlichkeiten herbeizog.

Diese letzteren sind es, welche das mathematische Studium schwer machen und die Freude daran verbittern. Der Geist, der in die Sache selbst sich vertiefen und versenken wollte, wird von ihnen seitwärts gesprengt, durch eine Menge enger krummer Nebenwege umhergejagt; so geht die reine, heitere speculative Fassung verloren, und kömmt man ans Ziel, was ist gewonnen? Glauben freilich muß man dem Beweise, denn Schritt vor Schritt betrachtet, war er ohne logischen Fehler; aber da man das Ganze nicht durchblickt, da vielmehr jeder einzelne Schritt einen Absatz im Denken macht, — so hätte man beinahe ebenso gern der Geschicklichkeit des Lehrers aufs bloße Wort geglaubt, als einem solchen Beweise. Gerade dem, der mit wahrem Gefühl den majestätischen Gang einer reinen Speculation zu bewundern und zu verehren fähig ist, der mit wahrer Unterscheidungskraft den Contrast erkennt zwischen ihr, und zwischen leeren losen Spitzfindigkeiten, willkührlich umhergezerrten Begriffen, tautologischen oder sophistischen Spielwerken, — gerade diesem muß es am unangenehmsten auffallen, wenn die Analysis mit einem nicht ganz edlen Ausdruck — von Kunstgriffen redet, — durch deren Hülfe aus einem Knäuel von Buchstaben ein anderer gemacht wird, der alsdann nach gewissen Mengen von Substitutionen, von Multiplicationen und Divisionen mit ganz fremden Größen, von hin- und hergeworfenen Gleichungen, fertig ist, um mit einem Schwert, das aus irgend einem Winkel der Rüstkammer herbeigeholt wird, zerhauen zu werden. Am Ende kommt oftmals eine so einfache Gleichung heraus, daß sie schon dadurch Verdacht erregt, das ganze Gewirre von Rechnungen, bei denen man die Aufgabe vergißt, um sie aufzulösen, könne dem Wesen der Wissenschaft wohl nicht zugehören.

Ein vortreffliches Beispiel von Verbesserung, das den stren-

lich schließen sich die meisten Lehrbücher noch mit mehr oder weniger Treue an den Euklid an, und somit wäre hier eine Kritik der Euklidischen Methode am Orte. Um jedoch den Einwurf zu vermeiden, daß sich doch in den zweitausend Jahren die Sache sehr geändert habe, wählen wir lieber als Grundlage unserer Betrachtungen dasjenige Lehrbuch, das in neuerer Zeit die größte Anerkennung bei Männern von Fach und die weiteste Verbreitung auch auf deutschen Schulen gefunden hat, nämlich die Elemente der Geometrie von Legendre.

Zwei Punkte sind es besonders, die hier Beachtung verdienen, nämlich die Anordnung und die Beweisführung; und da es nicht auf eine Kritik des genannten Werkes, sondern der darin befolgten alten Methode ankömmt, so soll nur das erste Buch, welches die Prinzipien enthält, geprüft werden. Daß hier keine Spur von einer wissenschaftlichen Ordnung zu finden ist, das zeigt eine bloße Aufführung der Lehrsätze, wie sie auf die bekannten Definitionen und Grundsätze folgen.

1) Alle rechte Winkel sind einander gleich.

---

gen systematischen Forderungen völlig entspricht, giebt die kombinatorische Begründung des binomischen und polynomischen Lehrsatzes, welche wir Hrn. Hindeburg verdanken. Aber für eine Veränderung im Ganzen hätte vorher die Metaphysik noch manche alte Schuld zu berichtigen. Besonders müßte durch sie die noch immer so mächtige Scheu vor dem Begriffe des Unendlichen aufhören, die unsere Mathematiker bewegt, auf seltsamen Umwegen dasjenige ohne diesen Hauptbegriff ihren Lehrlingen deutlich machen zu wollen, was den Erfindern selbst nur durch ihn zugänglich wurde. Eine Menge kleinerer Uebel

2. Jede gerade Linie CD*), welche einer anderen AB begegnet, macht mit ihr zwei anliegende Winkel ACD und BCD, deren Summe zweien rechten gleich ist.

3. Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen und bilden nur eine und dieselbe gerade Linie.

4. Wenn zwei an einander liegende Winkel ACD und DCB zusammen zweien rechten gleich sind, so liegen die äußeren Schenkel derselben AC und CB in einer geraden Linie.

5. Ueberall, wo sich zwei gerade Linien AB und DE schneiden, sind die im Scheitel einander entgegengesetzten Winkel gleich groß.

6. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn sie einen gleichen Winkel zwischen zwei Seiten haben, die einzeln in dem einen so groß sind als in dem andern.

7. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie eine gleiche Seite zwischen zwei Winkeln haben, die einzeln einander gleich sind.

8. In jedem Dreieck ist jede Seite kleiner, als die Summe der beiden übrigen.

9. Wenn man von einem Punkte O, im Innern

---

kann gleichwohl der Unterricht schon durch bessere Auseinandersetzung und Anordnung heilen.

*) Man wird sich die dazu gehörigen Figuren leicht konstruiren können. Freilich hätte der Gebrauch der Buchstaben hier leicht umgangen werden können, allein da wir später auf diese Bezeichnungsweise wieder zurückkommen, so ist hier nichts geändert worden.

eines Dreiecks ABC, nach den Endpunkten einer Seite BC, die geraden Linien OB und OC zieht, so ist die Summe dieser Linien kleiner als die der beiden Seiten AB und AC.

10. Wenn die beiden Seiten AB und AC des Dreiecks ABC einzeln den beiden Seiten DE und DF des Dreiecks DEF gleich sind, der von den beiden ersten eingeschlossene Winkel BAC aber größer ist, als der Winkel EDF zwischen den beiden andern, so behaupte ich, daß die dritte Seite BC des ersten Dreiecks größer ist, als die dritte Seite EF des anderen.

11. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn alle drei Seiten einzeln in dem einen so groß sind als in dem andern.

12. In einem gleichschenkeligen Dreiecke sind die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

13. Umgekehrt: wenn zwei Winkel in einem Dreieck gleich groß sind, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

14. Von zwei Seiten eines Dreiecks ist diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüber liegt; und umgekehrt: von zwei Winkeln eines Dreiecks ist derjenige der größere, welcher der größeren Seite gegenüber liegt.

15. Von einem gegebenen Punkte A, außerhalb einer geraden Linie DE, kann man nach dieser Linie nur eine einzige senkrechte ziehen.

16. Wenn man von einem, außerhalb einer geraden Linie DE liegenden Punkte A, eine Linie AB senkrecht auf jene, und außerdem verschiedene schräge

Linien AE, AC, AD u. s. w. nach verschiedenen Punkten der nämlichen geraden Linie zieht; so ist 1) die senkrechte Linie AB kürzer, als jede schräge; 2) die beiden schrägen Linien AC und AE, in gleichen Abständen BC und BE von der Senkrechten, sind gleich; 3) von zwei beliebigen schrägen Linien AC und AD ist diejenige die längste, welche sich am weitesten von der Senkrechten entfernt.

17. Wenn man aus dem Punkte C, der Mitte einer geraden Linie AB, die EF senkrecht auf AB errichtet, so ist 1) jeder Punkt der Senkrechten von den beiden Endpunkten der Linie AB gleich weit entfernt, 2) jeder Punkt außerhalb der Senkrechten ist von den nämlichen beiden Endpunkten ungleich weit entfernt.

18. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind gleich, wenn in dem einen die Hypotenuse und eine Seite so groß sind als im andern.

19. In jedem Dreiecke ist die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.

20. Die Summe der inneren Winkel jedes Vieleckes ist gleich so viel mal zwei Rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwei.

21. Wenn zwei gerade Linien AB und CD auf einer dritten FG senkrecht stehen, so sind sie parallel, das heißt: sie können sich nicht begegnen, so weit man sie auch verlängern mag.

22. Wenn die Summe der innern Winkel BOF und DOF, welche zwei gerade Linien AB und CD mit einer dritten machen, gleich zwei Rechten ist, so sind die Linien AB und CD parallel.

23. Wenn die Summe der innern Winkel, welche

zwei gerade Linien AB und CD mit einer dritten EF machen, kleiner oder größer ist als zwei Rechte, so müssen sich die Linien AB und CD, genugsam verlängert, nothwendig schneiden.

24. Wenn zwei gerade Linien AB und CD, welche parallel sind, von einer dritten EF geschnitten werden, so ist die Summe der innern Winkel AGO und GOC zwei rechten gleich.

25. Zwei Linien AB und CD, die mit einer dritten EF parallel sind, sind auch mit einander parallel.

26. Zwei Parallelen sind überall gleich weit von einander entfernt.

27. Wenn die Seiten zweier Winkel BAC und DEF, nach der nämlichen Seite hin, einzeln parallel sind, so sind die Winkel einander gleich.

28. Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind einander gleich. Ebenso die gegenüber liegenden Winkel.

29. Wenn in einem Vierecke ABCD die gegenüber liegenden Seiten gleich sind, so daß AB = CD und AD = BC: so sind die gleichen Seiten parallel, und die Figur ist ein Parallelogramm.

30. Wenn in einem Vierecke zwei gegenüber liegende Seiten AB und CD gleich und parallel sind: so sind auch die andern beiden Seiten gleich und parallel, und die Figur ABCD ist ein Parallelogramm.

31. Die Diagonalen eines Parallelogramms theilen einander wechselseitig in zwei gleiche Theile.

Dies ist die Anordnung der Prinzipien der Geometrie in einem für den Unterricht bestimmten Lehrbuche, in einem Buche, dessen wissenschaft-

liche Strenge und Folgerichtigkeit von so vielen Seiten' gerühmt wird. Daß hier (namentlich in den ersten 20 Sätzen) in dem Gedankengange im Ganzen oder in der Aufeinanderfolge der einzelnen Sätze eine innere Entwickelung, eine in der Sache liegende Anordnung zu erkennen sei, wird Niemand behaupten wollen. Daß aber Legendre hierin keine Ausnahme macht, daß man überall, wo die Elemente in Euklidischer Weise bewiesen werden, eine ähnliche Verwirrung findet, davon kann ein Blick in die gebräuchlichsten Lehrbücher überzeugen. Diese Unordnung in der Folge der Sätze ist jedoch ein nothwendiges Uebel, sobald man die Euklidische Beweisform fordert; sie ist aber zugleich ein Beleg, daß die Methode nicht wissenschaftlich ist.

Was aber die Beweisform selbst betrifft, so kann man fast an jedem Lehrsatze erkennen, welche Umschweife und Schleichwege eingeschlagen werden, um jene Isolirung der Verstandesthätigkeit durchzuführen, auf die die alte Methode so stolz ist; man vermeidet es sorgfältig, sowohl die Begriffe in ihrem konkreten Inhalte und in ihrer lebendigen Kraft zu erfassen, als auch eine apriorische Anschauung von dem Werden der Raumformen und der Nothwendigkeit ihrer Eigenschaften zu gewinnen. Indem man sich an den Wortsinn der zu diesem Zwecke besonders abgefaßten Definitionen hält, sucht man durch ganz inhaltlose Verstandesoperationen und erkünstelte Schlußfolgerungen auf einem zufällig eingeschlagenen Wege eine äußere Nothwendigkeit zu beweisen, ohne dabei eine Einsicht in die wirkenden Ursachen zu gewinnen. Zum Belege dieser Behauptungen möge

die Lehre von den Parallelen dienen, die, so einfach sie auch an sich ist, doch den Mathematikern von der alten Schule unüberwindliche Schwierigkeiten macht, weil sie weder vom Parallelismus noch vom Wesen eines Winkels, ja nicht einmal von der geraden Linie eine lebendige Anschauung haben. Wenn man sich aber, anstatt einer leeren Definition der Wörter, den positiven Inhalt dieser Vorstellungen angeeignet hat, so ergibt sich der Satz von den Parallelen von selbst als eine bei der Kombination der Linien nothwendige Erscheinung. «Eine Linie ist gerade, wenn sie stets dieselbe Richtung beibehält; wenn zwei gerade Linien gleiche Richtung haben, so nennt man sie parallel; wenn eine gerade Linie von einer anderen geschnitten wird, so nennt man den Unterschied ihrer Richtungen ihren Winkel. Da nun die beiden Parallelen gleiche Richtung haben, und auch die schneidende Linie ihre eigene Richtung stets unverändert erhält, so muß der Unterschied ihrer Richtung von der der Parallelen an beiden Durchschnittspunkten derselbe sein, d. h. die entsprechend liegenden Winkel müssen gleich sein, woraus die übrigen Sätze sich von selbst ergeben.» — Wer die strenge Nothwendigkeit dieser Folgerung nicht einsieht, der muß sonderbare Vorstellungen von wissenschaftlicher Erkenntniß und Begründung haben. Nun sehe man aber, wie Legendre die Sache anfängt. Zunächst erscheint der Hauptsatz (daß die entsprechenden Winkel gleich sind), der offenbar in der innigsten Verbindung mit dem Begriff der Parallelen*) steht, nur als Zu-

*) Freilich setzt Legendre diesen Begriff nicht voraus, sondern gibt nur die negative Erklärung, Parallelen seien solche

satz zu dem, daß die inneren Winkel zweien rechten gleich sind. Dieser wird durch einen **indirekten** Beweis auf den 23. Lehrsatz (siehe oben) gegründet, der bei Euklid als ein nicht zu beweisendes Axiom dasteht. Legendre aber beweist ihn auf eine sehr scharfsinnige Weise, wobei er sich jedoch auf die zwei Lehrsätze berufen muß, daß gleichen Dreieckseiten gleiche Winkel gegenüber liegen, und daß die Summe der drei Dreieckswinkel gleich zwei rechten ist. Der erstere Satz wird aus der Kongruenz der Dreiecke abgeleitet; der letztere, der eine unmittelbare Folge des Satzes von den Parallelen ist, muß nun, da er vorangestellt wird, auf einem höchst verwickelten Wege bewiesen werden. Von diesem Beweise, den wir, da er für die neuesten Entwickelungen der Euklidischen Methode sehr charakteristisch ist, unten*) wörtlich wie-

---

Linien, die sich beliebig verlängert nicht schneiden; aber darin liegt gerade der Grundfehler, der eine natürliche Behandlung des an sich so einfachen Verhältnisses unmöglich macht.

*) Lehrsatz: In jedem Dreiecke ist die Summe der drei Winkel gleich zwei rechten. Beweis: (Die Figur wird man leicht nach den Angaben zeichnen können.) Es sei ABC das gegebene Dreieck, AB dessen größte und BC dessen kleinste Seite, also ACB der größte, BAC der kleinste Winkel (vierzehnter Satz). Durch die Ecke A und durch die Mitte J der gegenüber liegenden Seite BC ziehe man die gerade AJ und verlängere sie bis C′, so daß $AC' = AB$. Auch verlängere man AB bis B′, so daß $AB' = 2\,AJ$.

Bezeichnet man nun die drei Winkel des Dreiecks ABC durch A, B und C und ähnlicherweise die drei Winkel des Dreiecks AB′C′, durch A′, B′ und C′, so ist $C' = B + C$ und $A' + B' = A$, woraus folgt, daß $A' + B' + C' = A + B + C$ (den Beweis hierfür, der leicht zu führen ist,

dergeben, sagt der Uebersetzer: «Er ist vielleicht von allen, die sich mit den hier vorausgeschickten

---

lassen wir aus; doch verdient es bemerkt zu werden, daß dieser zwischengeschobene Beweis beinahe eine Druckseite einnimmt). — Da nun aber nach der Voraussetzung $AC < AB$ und folglich $C' B' < AC'$ ist, so folgt, daß in dem Dreiecke $AC'B'$ der Winkel $A' < B'$ ist; und da nun die Summe dieser beiden Winkel $A' + B' = A$, so folgt, daß $A' < \frac{1}{2} A$ ist.

Wendet man ferner die nämliche Konstruktion auf das Dreieck $AB'C'$ an, so daß ein drittes Dreieck $AB''C''$ entsteht, dessen Winkel wir durch A'', B'', C'' bezeichnen wollen, so wird auf gleiche Weise $C'' = C' + B'$ und $A'' + B'' = A'$ sein, woraus folgt, daß $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Die Summe der Winkel ist also in den drei Dreiecken die nämliche. Zugleich ist $A'' < \frac{1}{2} A'$, und folglich $< \frac{1}{4} A$.

Setzt man die Reihe der Dreiecke ins Unbestimmte fort, so wird man nothwendig zu einem Dreiecke abc kommen, dessen Winkel a, während die Summe seiner drei Winkel die nämliche ist, wie die der drei Winkel von ABC, kleiner ist, als ein beliebiges Glied der abnehmenden Reihe $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{4} A$, $\frac{1}{8} A$ rc. Man kann nun die Reihe der Dreiecke soweit fortgesetzt annehmen, bis der Winkel a kleiner ist, als irgend ein gegebener Winkel.

Und wenn man aus dem Dreiecke abc das folgende Dreieck $a'b'c'$ konstruirt, so wird die Summe der Winkel a' und b' dieses neuen Dreiecks dem Winkel a gleich sein, folglich kleiner als irgend ein gegebener Winkel; woraus zu sehen, daß sich die Summe der drei Winkel des Dreiecks $a'b'c'$ beinahe auf den Winkel c' allein reduzirt. Um das genaue Maß dieser Summe zu haben, verlängere man die Seite $a'c'$ nach d' und bezeichne den äußern Winkel $b'c'd'$ durch x', so ist $x' + c' = 2\rho$ (rechten), $c' = 2\rho - x'$ und folglich die Summe der drei Winkel des Dreiecks $a'b'c'$ gleich $2\rho + a' + b' - x'$.

Nun kann man annehmen, daß das Dreieck $a'c'b'$, in seinen Winkeln und Seiten sich verändernd, zugleich alle auf einan-

Definitionen der geraden Linie und des Winkels geben lassen, der beste, und auch für den Unterricht der vorzüglichste, weil bei diesem Beweise am wenigsten der Zusammenhang und Fortgang des Lehrbegriffs gestört und unterbrochen wird.» Es ist unklar, was hier unter dem Lehrbegriff gemeint sei, und worin bei der ganzen Untersuchung der Fortgang bestehe. Besonders aber ist es kaum abzusehen, wie ein Anfänger solche Beweise begreifen und bei solchen Umschweifen und schwierigen Demonstrationen doch den «Zusammenhang des Lehrbegriffes» im Auge behalten soll. Allein auch abgesehen vom Schulunterricht, ist diese Art der Demonstration so abweichend von allem, was in anderen Disziplinen als wissenschaftliche Darstellung gilt, die Wahl der Beweismittel und der Gang des Beweises ist so willkührlich, daß man den ganzen Beweis für ein Werk, nicht der Wissenschaft, sondern der Sophistik halten muß. — Doch für Diejenigen, die ein unbefangenes Urtheil über wissenschaftliche Methode und ihre Erfordernisse haben, bedarf es keiner weiteren Auseinandersetzung. Aber, wird man

---

der folgenden Dreiecke vorstelle, welche ferner aus der nämlichen Konstruktion hervorgehen und welche sich immer mehr der Grenze nähern, in welcher die Winkel a' und b' Null sind. In dieser Grenze selbst fällt aber die Gerade $a'c'b'$ in die $a'b'$ und die drei Punkte a', c', b' liegen zuletzt genau in gerader Linie. Alsdann werden die Winkel b' und x', mit a' zugleich, Null, und die obige Summe $2\rho + a' + b' - x'$ der drei Winkel des Dreiecks $a'c'b'$ reduzirt sich auf 2ρ. Folglich ist in jedem Dreieck die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.

sagen, hier ist Ein Lehrsatz aus Einem Buche herausgegriffen; dieses einzelne Beispiel beweist noch nichts! Nun man sehe andere Beweise und andere Lehrbücher an; man wird überall Willkühr in dem Gange des Beweises, willkührliche Hülfskonstruktionen und eine von all diesen Zufälligkeiten abhängige Anordnung des Stoffes finden. Die Macht des Zufalls in der Euklidischen Methode hat schon Herbart erwähnt; ausführlicher spricht darüber Trendelenburg in den Logischen Untersuchungen, Seite 287 ff.*). Die Zufälligkeit der Behandlung, der Anordnung und Beweisführung beruht aber darauf, daß die Lehrsätze als Resultate früherer Entdeckungen schon vorliegen und nun ihre Nothwendigkeit irgendwie durch Erkenntnißgründe nachgewiesen werden soll. Da kommt es denn, wie bei juristischen Beweisen, auf einen glücklichen Zufall an und auf den Wortlaut der zum Grunde gelegten Gesetze und Definitionen, aus denen bloß vermittelst logischer Opera-

---

*) Wir ziehen einige Stellen aus. Er sagt: „— Auf diese Weise schreitet die Wissenschaft durch eine zufällige Ansicht fort. So scheint denn der Ruhm der Wissenschaft, die Nothwendigkeit, plötzlich zu verfliegen, oder doch wenigstens auf der Basis des Gegentheils, auf dem zutreffenden Gerathewohl zu ruhen.“ S. 288. „Wenn der Lehrsatz fix und fertig vorangeschickt und der Beweis hintennach gesandt wird, so sieht das Ganze wie eine Reihe starrer Behauptungen aus, die Fuß fassen und sich sodann verschanzen. So erscheinen Euklides Elemente, so Spinoza's Ethik und welche Schriften sonst den wohlbefestigten Weg des Euklides einschlagen. Allenthalben ist eine kunstreiche Verkettung, aber nirgends ein Werden und Wachsen.“ S. 294. Man vergleiche auch die S. 288 zitirte Stelle aus Hegel's Logik.

tionen, ohne Einsicht in den realen Kausalnexus, ohne Anschauung der wirklichen Verhältnisse allerlei Lehrsätze bewiesen werden sollen. Und genau betrachtet spielt doch die räumliche Anschauung, die man überall zu verbannen sucht, gerade in den ersten Anfängen, die für die Methode der Wissenschaft das Wichtigste sind, eine Hauptrolle. Es ist bekannt, daß alle Sätze zuletzt auf die Kongruenz (namentlich der Dreiecke) zurückgeführt werden. Der Begriff der Kongruenz aber wird nicht wissenschaftlich erfaßt, es wird nicht gesagt, Kongruenz sei die Gleichheit von Gestalt und Größe, oder die quantitative oder qualitative Identität, oder wie man sich sonst ausdrükken mag; sondern hier wird auf einmal die Anschauung untergeschoben, daß kongruente Figuren, auf einander gelegt, sich vollständig decken. So wird z. B. die Kongruenz der Dreiecke ganz äußerlich erfaßt; ein Dreieck wird auf das andere gelegt, und nun wird untersucht, ob die einzelnen Theile auf einander passen. So läßt sich nicht einmal das, worauf die Methode den größten Werth legt, streng durchführen. In der Regel ist auch der Euklidische Beweis nur eine weitläufige Umschreibung dessen, was die Anschauung unmittelbar und ebenso nothwendig ergibt. So auch der oben angeführte Beweis, daß die Winkel im Dreieck zweien Rechten gleich sind. Der Begriff des Winkels fordert nämlich, daß, wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden und diese dritte ihre Richtung ändert, dann auch die beiden entsprechenden Winkel, die sie mit jenen beiden Linien bildet, sich gleichmäßig ändern. Wenn man nun nicht die entsprechenden Winkel (einen inneren

und einen äußeren), sondern die beiden inneren beobachtet, so muß nothwendig der eine so viel zunehmen, als der andere abnimmt. Läßt man nun im Dreieck zwei Winkel ganz verschwinden, so muß der übrig bleibende dritte, der dann ein gestreckter, d. h. $= 2\varrho$ wird, die Summe der drei anfänglichen Winkel darstellen.

Nach allem diesem darf man wol behaupten, daß die Euklidische Methode den Forderungen der Wissenschaft nicht genügt. Eine wahrhaft wissenschaftliche Methode der Untersuchung kann sich nur ergeben, wenn man in die Genesis der geometrischen Gebilde einzudringen sucht und daraus ihr Wesen und ihre Gesetze ableitet. Die Wissenschaft sucht nach einer Erkenntniß der realen Nothwendigkeit. Die Euklidische Methode gibt nur die Nothwendigkeit des äußeren Zwanges, sie bewirkt höchstens, daß man ihre Lehrsätze nicht läugnen kann. Die wahre wissenschaftliche Nothwendigkeit aber soll aus der Einsicht in den schaffenden Grund entspringen, durch den man allein die Erscheinungen begreift*). Wir gehen daher auf das zurück, was oben über die Genesis der Raumgebilde gesagt ist. Wie die Erzeugung der geometrischen Größen sich wesentlich auf zwei ursprüngliche Thätigkeiten der produktiven Phantasie zurück führen läßt, nämlich auf die Bewegung und die Kombination; so kann man bei der Ableitung der geometrischen Gesetze zwei Thätigkeiten des Erkenntnißvermögens unterscheiden. Die eine ist die Unter-

---

*) Man vergleiche den XI. Abschnitt in Trendelenburg's Logischen Untersuchungen.

suchung der durch die Bewegung der Raumgrößen erzeugten Gesetze, die andere ist die Kombination von Vorstellungen und Auffassungsweisen, wodurch namentlich der Uebergang von einem Satze zum anderen vermittelt wird. Natürlich wirken die hier unterschiedenen Thätigkeiten des Erkenntnißvermögens selten isolirt, doch müssen wir sie hier der Deutlichkeit wegen auseinander halten und an einigen elementaren Sätzen nachweisen.

Was zuerst die Untersuchung der Bewegung betrifft, so läßt sich in den Elementen vieles unmittelbar aus der Entstehung der Raumgrößen ableiten. Der Zusammenhang zwischen der Genesis der Raumgröße und der Ableitung ihrer Eigenschaften läßt sich am deutlichsten da nachweisen, wo eine Größe sich auf verschiedene Weisen erzeugen läßt. So z. B. kann man das Dreieck als eine dreimal gebrochene, in sich zurücklaufende Linie ansehen (so entsteht das Dreieck gewöhnlich, wenn man es isolirt zeichnet); der das Dreieck beschreibende Punkt verändert dreimal die Richtung seiner Bewegung nach derselben Seite hin, und da er zuletzt wieder in die alte Richtung kömmt, so müssen sämmtliche Richtungsänderungen zusammen eine ganze Umdrehung, d. h. vier Rechte betragen. Da nun an jeder Ecke der Außenwinkel die Richtungsänderung angibt, und die Summe sämmtlicher Winkel sechs Rechte beträgt, so müssen die innern Winkel zusammen zwei Rechte betragen. — Man sieht hier deutlich, wie der Lehrsatz unmittelbar aus der Entstehung des Dreiecks abgeleitet ist. Das Dreieck läßt sich aber noch auf anderm Wege erzeugen; man kann es nämlich als eine Kombina-

tion dreier sich schneidenden Linien denken; nur darf man es dann nicht als starre Erscheinung auffassen, sondern man muß, zumal da es sich von den Richtungsverhältnissen handelt, die Linie alle möglichen Richtungen durchlaufen lassen, und in den dabei vorkommenden Veränderungen das Bleibende, die allgemeine Eigenschaft jedes Dreiecks erforschen. Diese verändernde Bewegung führt den Satz auf den von den Parallelen zurück. Jedoch ist es deutlich, daß man nicht, wie gewöhnlich geschieht, in Form eines, dem Lehrsatze angehängten Beweises sagen darf: Man ziehe durch die eine Ecke eine Parallele rc., denn dadurch verfällt man wieder der Willkühr der Hülfslinien und zufälligen Ansichten. Man drehe vielmehr die eine Dreieckseite selbst, wobei nothwendig der eine Winkel um eben soviel wächst als der andere abnimmt, so daß die Summe konstant bleibt; die Parallele ist dann nur eine besondere Erscheinung der gedrehten Seite, der abnehmende Winkel ist nun ganz verschwunden u. s. w.

Diese letztere Auffassung führt uns weiter und läßt uns einen tieferen Blick in den Proceß geometrischer Erkenntniß thun. Die Darstellung der Elemente muß nämlich ebenso wie die der höheren Mathematik nur eine Lehre von den Funktionen sein. Es ist nicht die Aufgabe der Wissenschaft, ins Blaue hinein allerlei unumstößliche Wahrheiten aufzustellen, sondern sie will die innere Nothwendigkeit, die die Dinge verkettet, erkennen, sie will begreifen, in welcher Weise die einzelnen Erscheinungen von einander abhängen, und die Gesetze dieser Abhängigkeit darstellen. So darf z. B. die Lehre von der Kongruenz

nicht auf die äußerliche That des Aufeinanderlegens zurückgeführt werden; sondern man untersucht, von welchen Größen das Dreieck als individuelle Raumform abhängig ist; es ist eine Funktion der drei Seiten, oder zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels rc., die Gestalt des Dreiecks ist eine Funktion der Winkel, der Flächeninhalt ist eine Funktion von Grundseite und Höhe rc. Das Wesen der Funktionenlehre aber ist beständige Bewegung und Veränderung der Größen, wie das aus der höheren Mathematik bekannt ist. Zur Erklärung darüber, wie man schon in den Elementen die Lehre von der Abhängigkeit hervorheben kann, möge hier noch die Ableitung des Satzes folgen, der als eine der Grundsäulen der Geometrie stets die größte Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat. Die gewöhnlichen Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes leiden an dem Fehler aller Beweise; sie setzen das abzuleitende Gesetz als bekannt voraus und beweisen es mittelst willkührlicher Hülfslinien und zufälliger Kombinationen; überdies ist es unwissenschaftlich, ihn auf das rechtwinkelige Dreieck zu beschränken und erst nachher künstlich auf das spitz- und stumpfwinklige Dreieck auszudehnen. Für das Dreieck ist, wie aus der im Leitfaden gegebenen Darstellung erhellt, die Betrachtung der drei Höhen und der dadurch gebildeten Abschnitte der Seiten ebenso wesentlich als die der Seiten selbst. Ist nun das Dreieck eine Funktion der Seiten, so müssen auch die Abschnitte Funktionen derselben sein, und es fragt sich, in welcher Weise sie von den Seiten abhängen. Die Methode der Funktionenbehandlung nun beruht bekanntlich darauf, daß man da,

wo eine Größe von mehreren veränderlichen abhängt, erst nur eine derselben wirklich verändert und die übrigen unverändert läßt. Hält man nun Eine Seite fest und läßt die zweite unter demselben Winkel wachsen, so erkennt man leicht, daß der eine Abschnitt der konstanten Seite in demselben Verhältnisse wie die andere Seite wächst, während der daranliegende Abschnitt der veränderlichen Seite sich nicht ändert. Daraus läßt sich leicht folgern, daß die aneinander liegenden Abschnitte sich umgekehrt verhalten, wie die Seiten, zu denen sie gehören, oder daß die Rechtecke aus Seite und Abschnitt gleich groß sind, woraus sich der Pythagoreische Lehrsatz in der allgemeinsten Form ($C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$) und auch das Gesetz über die Größe der Abschnitte wie von selbst ergibt (vergl. Leitfaden §. 63—67). So erscheint der Pythagoreische Lehrsatz nicht als eine zufällig entdeckte und durch zufällige Mittel bewiesene Wahrheit, sondern als Ausdruck der gegenseitigen Abhängigkeit der Seiten des Dreiecks. — Der hier angedeutete Gang der Untersuchung läßt sich ohnstreitig durch die gesammte Geometrie durchführen; er allein führt zu einer wahren, auf den realen Kausalnexus gegründeten Einsicht in die geometrischen Gesetze; er allein kann auf den Ruhm der Wissenschaftlichkeit Anspruch machen,

Als das zweite Mittel, um einen in der Sache liegenden Fortschritt in der geometrischen Erkenntniß zu begründen, ist eben die **kombinatorische Thätigkeit** genannt worden. Wie durch Kombination der einfachen, durch Bewegung erzeugten Größen eine unendliche Mannigfaltigkeit verwickelter Gebilde er-

zeugt wird; so führt die Kombination auch die Erkenntniß vom Einfachen, Handgreiflichen zur Einsicht in schwierige Verhältnisse. Um bei der eben gegebenen Darstellung des Pythagoreischen Lehrsatzes stehen zu bleiben, so beruht sie auf einer — natürlich nicht willkührlichen, sondern in der Sache liegenden — Kombination der Sätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke und über den Flächeninhalt der Rechtecke. Je zwei Seiten und ihre aneinander stoßenden Abschnitte bilden ähnliche Dreiecke; also verhalten sich die Seiten umgekehrt wie ihre Abschnitte. Hier ist noch kein Sprung. Nun aber kommt als etwas Neues die Vorstellung hinzu, daß in gleichgroßen Rechtecken die Grundseiten sich umgekehrt wie die Höhen verhalten, daß man also aus Seiten und Abschnitten gleichgroße Rechtecke bilden könne; und so ergeben sich zuletzt die Quadrate der Seiten, von denen der Lehrsatz handelt. Freilich ist, wie man an diesem Beispiele sieht, die Kombination ihrer Natur nach erfinderisch; sie scheint oft große Sprünge zu machen und somit auch etwas Zufälliges an sich zu haben; in ihr offenbart sich das mathematische Genie. Allein man unterscheide ja die wahre Genialität, die mit einem glücklichen Griffe sogleich das Wesentliche, Ursprüngliche erfaßt, von jener falschen Genialität, die sich am Sonderbaren und Künstlichen, an Gaukeleien und Taschenspielereien erfreut. Ueberhaupt aber tritt die kombinatorische Thätigkeit, die immer in ihrem Fortschritte etwas Räthselhaftes hat, erst in den verwickelten Erscheinungen der höheren Geometrie in voller Macht hervor; auf ihr beruht zum großen Theile das, was man in der Regel als analytische Betrach-

tung bezeichnet. Es ist aber nicht so sehr eine auflösende Zergliederung als eine neue Zuthat, wenn man z. B. eine verwickelte Figur in Dreiecke zerlegt. Dadurch wird die Figur nicht aufgelöst, sondern erst in ihrer Totalität angeschaut, indem die unverbundenen Punkte durch Diagonalen verknüpft, und dadurch ihre Entfernungen und ihre Richtungsverhältnisse anschaulich dargestellt werden. Wie in der Arithmetik z. B. Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen durch Kombination auf einfache Gleichungen zurückgeführt werden, so muß in der Geometrie alles auf Dreiecke, in denen sich die Gesetze gegenseitiger Abhängigkeit am einfachsten aussprechen, zurückgeführt und aus dem Wesen des Dreiecks begriffen werden.

Was im Vorigen über das Wesen der genetischen Methode gesagt ist, wird, so lückenhaft die Darstellung auch im Einzelnen sein mag, für den Zweck dieser Schrift genügen. Daß man in das Werden der Dinge eingehen muß, um ihr Wesen zu begreifen, das ist eine allbekannte Wahrheit. Daß die Euklidische Methode das nicht thut, das liegt am Tage. Wenn man nun sieht, daß in unserer Zeit ein ganz neuer Geist in die Wissenschaft eingedrungen ist*), daß andererseits die Pädagogen fast einstimmig die Mangelhaftigkeit der alten Methode anerkennen und, wie in allen Disziplinen, so auch in der Mathematik eine vernunftgemäße Behandlung for-

*) In rein geometrischer Behandlung der Funktionenlehre hat namentlich Steiner Außerordentliches geleistet in seinem Werke: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, 1832.

dern; so ist es an der Zeit, daß auch die Schulbücher einer Reform unterworfen werden. Dabei ist es nicht genügend, etwa einzelne allzukünstliche Beweise durch einfachere zu ersetzen, hier und da die Anordnung der Lehrsätze zu verbessern u. dergl. Was in der Euklidischen Methode das Wesentliche ist, wodurch namentlich die ganze Anordnung des Stoffes bedingt wird, die Beweisform muß ganz aufgegeben werden, wenigstens so weit sie nicht das Wesen des Lehrsatzes, die wirkliche Ursache des Gesetzes enthüllt, sondern nur durch den äußeren Zwang rein verstandesmäßiger Operationen zur Anerkennung einer Wahrheit zwingt. Besonders ist der indirekte Beweis gänzlich zu verwerfen, da er nur ein negatives Resultat geben kann*). Die Umkehrung der Sätze, wobei er die Hauptrolle zu spielen pflegt, muß auf die Einsicht in die Gegenseitigkeit der geometrischen Abhängigkeit gegründet werden. Ueberhaupt aber muß nicht erst der Lehrsatz und dann der Beweis gegeben werden; sondern erst muß die wirkende Ursache erkannt und daraus die Folge abgeleitet werden. Was die Anordnung des Ganzen betrifft, so muß sie nicht durch die Forderung eines streng logischen Beweises bestimmt werden, wodurch besonders in den Elementen eine fast chaotische Verwirrung entsteht; sondern nach inneren Prinzipien muß der Stoff sich aus sich selbst systematisch entwickeln; die Ordnung muß aus der Sache selbst hervorgehen, nicht aus dem zufälligen Gange der außer der Sache liegenden Beweise.

---

*) Vergl. Trendelenburg, Logische Untersuchungen, den 18. Abschnitt.

Indessen ein Schulbuch kann nicht immer die wissenschaftliche Methode streng und rein darstellen; und der Schulunterricht muß zuweilen von der wissenschaftlichen Darstellung abweichen, um die besonderen Zwecke der Schule nicht aus den Augen zu verlieren. Wir wenden uns daher zum zweiten Theile der Untersuchung.

II.

Pädagogische Zwecke der Methode.

Es sollen hier keine allgemeine pädagogische Betrachtungen über das Wesen der Schule oder über den Begriff der Bildung angestellt werden, sondern wir untersuchen nur, in welcher Weise der mathematische Unterricht in das Gesammtleben der Schule einzugreifen hat. Von dem unmittelbaren praktischen Nutzen der mathematischen Bildung kann dabei natürlich nicht die Rede sein; Niemand wird ihn läugnen, aber es wird ihm auch Niemand einen bestimmenden Einfluß auf die Methode des Unterrichts einräumen. Wo nach den Forderungen der Wissenschaft und der allgemeinen Pädagogik unterrichtet wird, da muß der praktische Nutzen sich von selbst ergeben. Andrerseits kann hier, da vom Elementarunterricht die Rede ist, nicht auf die höheren und höchsten Stufen der Bildung Rücksicht genommen werden, wo die Mathematik als selbständiges Fachstudium des Gelehrten oder des Technikers erscheint.

Wenn Bildung*) im Allgemeinen nichts Anderes ist, als harmonische Entwickelung und Steigerung der Seelenkräfte, so fragt es sich, welche Seelenkräfte durch die Mathematik gebildet werden können, und in welcher Weise dies überhaupt möglich ist. Man hat früher bei der Mathematik immer zunächst und meistens ausschließlich die Uebung des Verstandes im Auge gehabt; und es liegt am Tage, daß es kaum ein besseres Mittel gibt, um den Menschen an ein scharfes, geordnetes Denken zu gewöhnen, als diese Wissenschaft. Allein die Schule hat noch etwas Anderes zu bilden außer dem Verstande, der freilich in ihr eine große Rolle spielt, dessen einseitige Entwickelung aber zu einem dürren, inhaltlosen Formalisiren führt. Auch finden wir in der menschlichen Seele neben dem ordnenden, aufklärenden, untersuchenden Verstande noch andere Kräfte wirksam, durch welche uns der Inhalt der Gedanken und Begriffe zugeführt wird. Wir eignen uns die äußere Welt an durch die Anschauung, wir schaffen uns eine innere Welt durch die Phantasie. Wahrhafte geistige Bildung ist nur möglich bei einer harmonischen Entwickelung dieser drei Kräfte; ja es läßt sich kaum eine wirksame Thätigkeit des Verstandes denken, ohne daß Anschauung oder Phantasie der Seele zuvor den Stoff geliefert hätten, den sie mit dem Gedanken verarbeiten soll. Da aber diese Kräfte niemals isolirt wirken können, sondern, wie die Psychologie lehrt, in einer beständigen Wechselwirkung stehen, die auf der fundamentalen Einheit der menschlichen Seele beruht:

*) Es ist hier natürlich nicht von sittlicher, sondern von intellektueller Bildung die Rede.

so kann auch keine derselben ohne die anderen ausgebildet werden; und es ist ein wesentlicher Mißgriff, die Uebung der verschiedenen Kräfte etwa auf verschiedene Unterrichtsgegenstände vertheilen zu wollen, oder gar in besonderen Stunden «Denkübungen und Anschauungsübungen» zu treiben. Denn was ist Anschauung ohne Gedanken, was Gedanke ohne Anschauung? So ergibt sich für den geometrischen Unterricht die Aufgabe, nicht bloß den Verstand zu schärfen, sondern auch die Anschauung zu bilden und die produktive Phantasie auf ihrem Gebiete zu üben. Daß schon das Sehen eine Kunst sei und durch mannigfaltige Uebungen ausgebildet werden müsse, hat Herbart in seinem trefflichen ABC der Anschauung entwickelt. Kenner des Alterthums wissen, welcher hohen Vollkommenheit der Gesichtssinn fähig ist, namentlich was die Genauigkeit der Beobachtung betrifft; und es ist kaum zu sagen, wie viel dem jetzigen Geschlechte durch Vernachlässigung dieses edelen Sinnes entgeht. Zwar fördert man, um diesem Uebelstande abzuhelfen, jetzt überall nach Kräften den Zeichenunterricht; allein die Geometrie bietet dazu eine ebenso günstige Gelegenheit, die man um so weniger versäumen sollte, als sie selbst bei einer umfassenderen Uebung in der Beobachtung bedeutend an lebendiger Frische gewinnen kann. Noch größerer Nachdruck ist indessen auf die Uebung der Vorstellungskraft zu legen, durch welche wir fähig werden, mit dem inneren Sinne anzuschauen, was wir nicht sehen. Die Wichtigkeit dieser Seelenkraft für die Entwickelung des geistigen Lebens liegt auf der Hand; sie bestimmt den Umfang des Stoffes, den

der Geist sich aneignen und in sich verarbeiten kann. Nun ist es eine bekannte Thatsache, daß bei gesteigerter wissenschaftlicher Thätigkeit die Gewandtheit und Frische der Vorstellungskraft gar häufig abnimmt; ja, dies kann so weit gehen, daß man mit Recht sagt, es habe sich einer dumm studirt; und auch hier führt eine Vergleichung unseres Zustandes mit dem der alten Zeit zu einem kläglichen Resultate. Es ist dies die nothwendige Folge der einseitigen Verstandesbildung, und namentlich einer fast systematisch durchgeführten Unterdrückung der mathematischen Phantasie. Denn wie die Raumverhältnisse die allgemeinste Erscheinungsform der Dinge selbst sind, so ist die Vorstellung derselben wesentliche Bedingung jeder Vorstellung überhaupt. Nun sind aber die meisten Menschen kaum im Stande, die einfachsten Raumverhältnisse sich ohne Zeichnung, d. h. ohne Beihülfe des Gesichts vorzustellen, und dies hindert sie manche der alltäglichsten Erscheinungen (z. B. die Bewegung einer Windmühle, die Wirkung einer Maschine, die Grundgesetze der Perspektive u. s. w.) zu verstehen. Daß hier in der gewöhnlichen Schulbildung noch eine große Lücke ist, das wird Niemand läugnen; es ist aber eine wesentliche Aufgabe des geometrischen Unterrichts diese Lücke auszufüllen.

Wenn nun der Unterricht in der Geometrie nicht bloß denken und verständig urtheilen lehren, sondern auch die Anschauung üben und namentlich die Vorstellungskraft zur mathematischen Phantasie ausbilden soll; so fragt es sich weiter, in welcher Weise dies möglich sei. Eine gründliche Beantwortung dieser Frage gehört ins Gebiet der allgemeinen Pädagogik

Es ist eine schwere Kunst, erziehend zu unterrichten, d. h. so, daß der Schüler nicht bloß Kenntnisse in sich aufnehme, sondern auch in wahrer Bildung, in harmonischer Entwickelung seiner Seelenkräfte fortschreite. Hier können nur einige Grundbedingungen einer solchen pädagogischen Einwirkung besprochen werden, insofern sie für die Gestaltung des geometrischen Unterrichts von Bedeutung sind.

Die künstlich gesteigerte Entwickelung der Seelenkräfte, welche Zweck der Erziehung ist, muß sich durchaus an die natürliche Entwickelung der Seele anschließen, wenn man nicht bloß eine widernatürliche und widerliche Dressur durchsetzen will. Nun ist es bekannt, daß der reflektirende und abstrahirende Verstand sich im Knaben erst spät (etwa im 13. bis 15. Jahre) entwickelt. Vorher ist die Phantasie und die Anschauung vorherrschend thätig, um der jungen Seele erst einen reichen Stoff von Vorstellungen zuzuführen. Wer also von einem Knaben, der noch kaum geordnet und klar denken kann, schwierige Abstraktionen oder eine größere Reihe in einander hängender Schlußfolgerungen fordert, der thut seiner Seele Gewalt an und hemmt vielmehr die Entwickelung, anstatt sie zu fördern. Es ist daher dringend nothwendig, nicht zu früh mit der nackten Wissenschaft vor den Schüler zu treten, sondern ihm den Gegenstand derselben vermittelst der Anschauung vertraut zu machen und dabei dem natürlichen Blicke und anschaulichen Vorstellungsweisen einen möglichst weiten Spielraum zu lassen. Erst allmählig darf man von dem Schüler fordern, daß er den Standpunkt der unmittelbaren Anschauung verlasse und dem Lehrer auf das

fremde Gebiet der Begriffe und des begriffsmäßigen Verständnisses folge. Dabei ist jedoch zu beachten, daß der Schüler nur solche Vorstellungen und Begriffe in sich aufnimmt, für die er im Bereiche seiner Erfahrung feste Anknüpfungspunkte findet. Die Wissenschaft freilich sucht sich, da sie nur auf sich beruhen will, möglichst zu isoliren, und namentlich, wo sie aprioriſch verfährt, nur aus ihrem Prinzipe aufzubauen. Der Pädagog aber muß überall anknüpfen, sich auf die Erfahrung berufen, diese gleichsam nur erweitern, die unklaren Vorstellungen, die der Schüler schon besitzt, läutern und weiter entwickeln. Dies gilt von allen Disziplinen, weil es eine in der Psychologie begründete Forderung der Pädagogik ist; es ist namentlich wegen des ausgeprägten wissenschaftlichen Charakters der Mathematik nothwendig, sie dem Schüler beständig zu vermitteln. Mit vollem Rechte sagt daher Herbart in seinem Umriß pädagogischer Vorlesungen §. 39: «Die mathematischen Studien müssen sich der Naturkenntniß und hiermit der Erfahrung anschließen, um Eingang in den Gedankenkreis des Zöglings zu gewinnen. Denn auch der gründlichste mathematische Unterricht zeigt sich unpädagogisch, sobald er eine abgesonderte Vorstellungsmasse für sich allein bildet, indem er entweder auf den persönlichen Werth des Menschen wenig Einfluß erlangt, oder noch öfter dem baldigen Vergessen anheimfällt.»

Endlich beruht der Erfolg der pädagogischen Bemühung lediglich darauf, daß es gelingt, das Interesse für den Lehrgegenstand zu erhalten oder, wo es noch nicht vorhanden ist, zu erwecken, und den Schü-

ler zu beständiger geistiger Thätigkeit anzuregen. Denn nur eigene Kraftentwickelung kann die Kraft steigern. Man wird daher auf die verschiedenen Thätigkeiten der Seele, die beim geometrischen Unterricht in Anspruch genommen werden können, eine besondere Aufmerksamkeit verwenden müssen und sich bemühen, den Schüler in jeder Beziehung möglichst viel selbst thun zu lassen. Auch dies ist nur dann möglich, wenn man ihn nicht plötzlich aus seiner Lebenssphäre herausreißt, sondern, von dem unmittelbaren Leben und Treiben der Jugend ausgehend, in ihren gewohnten Thätigkeiten den geistigen Inhalt nachweist, und so den Schüler allmählig zu rein wissenschaftlichen Operationen anleitet. Die Mathematik hat in dieser Beziehung eine besonders günstige Stellung, da sie im Leben der Natur, wie in den Werken der Kunst und Industrie konkret geworden und dadurch besonders geeignet ist, die Wissenschaft mit dem Leben zu vermitteln. Ist nicht namentlich der Städter überall von geometrischen Formen umgeben? Und soll das nur ein Verlust für ihn sein? Da er das Leben und Treiben der schaffenden Natur nicht in ihrer Fülle beobachten kann, so muß er sich an den Werken des Geistes entschädigen. Und kann er hier nicht auch beobachten, und einen reichen Stoff für seine Phantasie finden? Allerdings; nur muß diese Seelenkraft nicht geknickt, sondern gehegt und gepflegt werden; nur muß der Schüler zu eigner, seinem Alter angemessener Thätigkeit angeleitet werden, zu solcher Arbeit, die ihm eine Lust ist, die er nicht mit dem verhaßten Schulbuche in die Ecke wirft. Wie diese Aufgabe zu lösen sei, davon weiter unten. Wir werfen

erst einen Blick auf die alte Methode, um zu erklären, warum sie die Aufgabe nicht gelöst hat. — Zunächst ist es ja bekannt, daß die Euklidische Methode durchaus nur Verstandesoperationen zuläßt; sie verachtet die Anschauung als einen Trug und Schein; und sie war freilich zu ihrer Zeit, wo die Anschauung noch ein so vorherrschendes Element in der menschlichen Seele war, ganz in ihrem Rechte, wenn sie mehr auf logische Analyse und Synthese drang. War doch die Mathematik überhaupt damals noch ganz in der Geometrie befangen, d. h. in dem Gebiete der Anschauung! und so war es nothwendig, auf eine extreme Weise die aprioristische Wissenschaftlichkeit und den rein geistigen Inhalt dieser Wissenschaft darzustellen. Damals mußte die Harmonie der Seelenkräfte bei dem überwiegenden Einflusse der Phantasie durch eine kräftigere Entwickelung der verstandesmäßigen Betrachtung erst wieder hergestellt werden. In neuerer Zeit aber, wo in allen Verhältnissen, in allen Wissenschaften, die Anschauung, die Phantasie vom Verstande fast unterdrückt ist; da hat man dies Uebergewicht dieser verstandesmäßigen oder rationalistischen Richtung auch als eine Einseitigkeit, als ein Extrem anzusehn; und auf allen Gebieten, im politischen wie im religiösen Leben, in Kunst und Wissenschaft sucht man sich von den dürren Reflexionen und Abstraktionen, von leerem Schematisiren und Distinguiren frei zu machen, und sich zu einer lebendigeren, zugleich geistigeren und natürlicheren Auffassung und Behandlung zu erheben. Wie vielmehr aber ist es Aufgabe der Schule, die kommende Generation auf diese neu eröffneten Bahnen hinzuleiten,

und jede Einseitigkeit, namentlich die, an der unsere Zeit noch immer in hohem Grade leidet, die Herrschaft des abstrakten Verstandes, zu überwinden und den Menschen je mehr und mehr zu jener Harmonie der Seelenkräfte hinzuführen, die allein wahrhaft Großes zu leisten im Stande ist. Was soll uns aber, wenn diese Aufgabe gelöst werden soll, die einseitige Verstandesbildung, wie sie durch die alte Euklidische Methode gefördert wird? Was soll die Übung in einer Methode zu denken und zu erkennen, die, von aller übrigen Erkenntniß losgelöst, weder im allgemein wissenschaftlichen, noch im praktischen Leben irgend eine durchgreifende Anwendung findet?*)

Doch es ist schon oben darauf hingedeutet worden, daß die Weise, wie die Erkenntniß in den starren Formen der Euklidischen Methode sich entwickelt, oder zu entwickeln scheint, gar nicht als die wahre Methode des Denkens angesehen werden kann. Hier muß besonders hervorgehoben werden, daß man diese Methode nach den oben angedeuteten Grundsätzen der Pädagogik entschieden verwerfen muß. Denn die Euklidische Methode setzt geflissentlich gar nichts voraus, während eine gesunde Pädagogik das Neue immer nur an die dem Schüler geläufigen Vorstellungsmassen anknüpft und also möglichst viel voraussetzt; die

*) Herbart sagt in seinem ABC S. 44, gegen die Euklidische Methode polemisirend: Um die Vorübung im Denken abzugeben, muß das mathematische Räsonnement keine eigne Art des Denkens sein, sondern es muß den nämlichen Gang nehmen, den allgemein der gesunde Verstand seiner Natur nach geht, sofern er von zufälligen Störungen im Überlegen nicht gehindert wird.

Euklidische Methode läugnet die Berechtigung und aprioriſche Nothwendigkeit der Anschauung, während die Seele des Knaben ganz in der Anschauung lebt und von ihr erfüllt ist; sie fordert einen Beweis von Wahrheiten, die sich oft von selbst verstehen; ja sie verlangt, daß man die Möglichkeit dessen erst beweise, was dem Schüler schon Wirklichkeit ist*). Und nun betrachte man die Form der Beweise! Ist es möglich, und wenn es auch möglich wäre, ist es nicht eine unverantwortliche Quälerei, von einem Knaben von 10—12 Jahren zu fordern, daß er einen Beweis wie der oben angeführte von Legendre begreife oder nur mit Aufmerksamkeit verfolge? Es ist nicht möglich. Geistvolle Knaben kann eine strenge Durchführung der Euklidischen Methode nur mit Widerwillen erfüllen; ihnen ist die lebendige, warme Anschauung viel zu lieb, sie ist zu innig mit ihrem Wesen verwachsen, als daß sie sie gegen die Spitzfindigkeiten einer für sie höchst langweiligen Wissenschaft aufgeben sollten. Die Masse der Schüler kann dem wissenschaftlichen Gange durchaus noch nicht folgen, und lernt — was überhaupt der Fluch unserer Schule ist — entweder ganz stumpf und theilnahmlos auf der Bank sitzen, oder unbegriffenes Zeug nachplappern. Und wenn wirklich ein paar Schüler von dem wis-

*) So legt z. B. Grunert, in seinem Lehrbuch der ebenen Geometrie für die mittleren Classen höherer Lehranstalten, §. 49, einen besondern Nachdruck darauf, daß „in aller Strenge gezeigt ist, daß überhaupt gleichschenklige Dreiecke möglich sind." Wenn der Gelehrte darin auch vielleicht einigen Sinn finden kann, muß es aber nicht der gesunden Vernunft eines Knaben lächerlich vorkommen, dergleichen beweisen zu wollen?

senschaftlichen Geiste ergriffen werden, der allerdings der Euklidischen Methode zu Grunde liegt, so ist der Gewinn gegen den unendlichen Schaden nicht anzuschlagen.

Die Losreißung der Geometrie von der Anschauung hat auch zu einer Sonderung aller geometrischen Begriffe von den im Leben geläufigen Vorstellungen geführt, die den weitverbreiteten Wahn begründet hat, es sei die Mathematik ein ganz absonderliches Gebiet, in dem sich nur wenige, dazu besonders disponirte Köpfe zurecht finden könnten; so hört man oft ganz gescheute Männer sagen, sie könnten durchaus nichts Mathematisches begreifen. So ist z. B. einer der wichtigsten mathematischen Begriffe der der Ähnlichkeit. Dieser Begriff ist zugleich im gewöhnlichen Leben so geläufig, daß jeder Mensch eine deutliche Vorstellung von dem hat, was dieses Wort bezeichnet, wenngleich nur die Wenigsten eine Begriffsdefinition davon geben können. Wie leicht ist es aber, diese Vorstellung zu läutern und zu erläutern, und so den mathematischen Begriff der Ähnlichkeit zu gewinnen. Ähnlichkeit ist nämlich Gleichheit der Gestalt. Die Gestalt aber beruht auf den Größenverhältnissen und Richtungsverhältnissen (d. h. Winkeln) der Linien, Flächen 2c., wie das leicht am ersten besten aus dem Leben gegriffenen Beispiele nachgewiesen werden kann. Geht man nun zu geometrischen Größen über, so läßt sich leicht erkennen, durch welche Elemente eine jede besondere Gestalt erzeugt und bestimmt wird; denn auf die Erzeugungsweise kommt es wesentlich an. Daraus lassen sich dann die Bedingungen der Ähnlichkeit leicht ableiten.

Nun sehe man aber, was die geometrischen Lehrbücher sagen. Sie verachten jene vielleicht noch unklaren Anschauungen des Knaben, und legen dem alten bekannten Worte einen scheinbar ganz neuen Begriff unter; ja Legendre gibt vier Definitionen, die dennoch keineswegs umfassend sind. Zunächst heißt es in der Planimetrie: „Zwei Figuren sind ähnlich, wenn ihre Winkel einzeln gleich und ihre ähnlich liegenden Seiten proportional sind." Diese Erklärung enthält einerseits, streng genommen, schon einen Lehrsatz, und ist andrerseits nur für geradlinige Figuren anwendbar. In der Stereometrie wird gelehrt: „Pyramiden sind ähnlich, wenn zwei ihrer Seitenebenen einzeln ähnlich sind, ähnlich liegen und gegen einander gleiche Neigung haben" — „Polyeder sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen haben, und wenn die Scheitel der ähnlich liegenden Körperwinkel außerhalb der Grundfläche einzeln durch ähnliche dreieckige Pyramiden bestimmt werden" — „Cylinder oder Kegel sind ähnlich, wenn sich ihre Axen wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten." Bedenkt man, daß dies keine Lehrsätze, sondern sämmtlich Definitionen des Wortes ähnlich sein sollen, so kann man es keinem Schüler verargen, wenn er am Schlusse doch nicht weiß, was Ähnlichkeit sei, und zu dem traurigen Bekenntniß kommt, er könne die Mathematik nicht begreifen. Freilich läßt es sich auch wissenschaftlich nicht rechtfertigen, daß der Eine Begriff so zersplittert wird. Diese sogenannten Definitionen geben nicht den Begriff der Ähnlichkeit, sondern ihre verschiedenen Erscheinungsformen. Betrachten wir indessen eine andere Definition der

Aehnlichkeit, die vielleicht jeder wissenschaftlichen Anforderung genügt. Tellkampf definirt in seiner vortrefflichen „Vorschule der Mathematik" §. 252: „Zwei Figuren sind einander ähnlich, wenn bei irgend einer Lage derselben die von irgend einem Punkte ausgehenden Geraden verhältnißgleich geschnitten werden." Diese Definition ist freilich erschöpfend und läßt sich leicht auch auf Körper ausdehnen. Allein sie ist durchaus abstrakt und setzt dabei zu viel Nebenvorstellungen voraus (entsprechende Lage, einen Aehnlichkeitspunkt und eine unendliche Menge von da ausgehender Geraden), so daß sie nie zu einer lebendigen Vorstellung, und somit zum Eigenthum des Schülers wird. Namentlich aber wird er nur mit Mühe, wenn nämlich der Lehrer ihn darauf aufmerksam macht, begreifen, daß dieser mathematische Begriff der Aehnlichkeit nichts anderes sei, als was er sich schon immer unter dem Worte gedacht hat. So werden ihm nicht allein die neuen Vorstellungen nicht nahe gelegt, sondern auch die alten geläufigen Vorstellungen entfremdet.

Ueberhaupt wie oft hört man nicht die Klage: unser Lehrer wußte uns die Sache nicht nahe zu legen, wir begriffen nicht, was er überhaupt wolle u. s. w. Diesen Klagen liegt immer der pädagogische Fehler zum Grunde, daß der Lehrer es nicht versteht, das Neue an das, was schon Eigenthum des Schülers ist, anzuknüpfen; und daß dieser Fehler grade in der Mathematik so häufig begangen wird, kommt theils daher, daß die Mathematiker selbst meist einseitig in ihrer Bildung und folglich keine guten Pädagogen sind, theils daher, daß sie absichtlich sich bemühen,

dem Knaben, der noch ganz am konkreten Leben hängt, die Bewunderung der abstrakten Welt aufzudrängen, die ihre eigne Seele erfüllt.

Was ist aber die Folge davon? Das Interesse, das eine wesentliche Bedingung jedes Fortschrittes ist, nimmt ab und verwandelt sich nur zu oft in Widerwillen. Damit hört aber jede Selbstthätigkeit des Schülers auf, und doch ist sie nirgends so nothwendig als in der Mathematik. Statt zu begreifen, statt zu denken, lernt er höchstens, dem Zwange nachgebend, auswendig, oder er sitzt ganz theilnahmlos und unthätig da und, jenachdem sein Temperament beschaffen ist, geräth er in ein dumpfes Hinbrüten, oder er treibt Thorheiten. Hier möge die Erfahrung*) weiter reden, denn es ist ein mißliches Ge-

---

*) Freunde und Verehrer der Euklidischen Methode werden das hier vom pädagogischen Standpunkt aus gefällte Urtheil vielleicht etwas wegwerfend finden. Daß die Euklidische Methode vortrefflich wirken kann, wo sie, von einem tüchtigen Pädagogen gehandhabt, wirklich in das Seelenleben der Jugend eingreift, das soll nicht geläugnet werden. Allein die Erfahrung bestätigt nur zu sehr, daß dies höchst selten der Fall ist. Der Verfasser, der die in dieser Schrift entwickelten Gedanken schon Jahre lang mit besonderer Vorliebe verfolgt und auf den Unterricht anwendet, ist kaum mehr im Stande sich vorzustellen, wie man überhaupt nach der alten Methode unterrichten kann; namentlich ist es ihm unbegreiflich, wie man für die gewöhnliche Darstellung der ersten Elemente auch nur einige Aufmerksamkeit erzwingen kann. Da er somit kein Bild von der praktischen Behandlung der Methode hat, so kann er sie nicht im Einzelnen kritisch beleuchten, und er muß sich begnügen, die Methode, wenigstens soweit sie sich in den gebräuchlichsten Schulbüchern erkennen läßt, aus allgemeinen pä-

schäft, unerfreuliche Zustände ausführlicher zu beschreiben. In unsern Tagen mag bei größerer pädagogischer Bildung an vielen Schulen schon ein viel erfreulicherer Zustand eingetreten sein; doch wird Niemand zu behaupten wagen, daß im Allgemeinen der mathematische Unterricht schon die Früchte trage, die man von ihm zu erwarten berechtigt ist.

III.
Darstellung der Methode.

Die Grundgedanken, die den Lehrer beim Unterricht in der Geometrie leiten müssen, sind in den vorigen Abschnitten dargestellt worden; sie beruhen einerseits auf der Forderung der Wissenschaft, daß man in das Wesen und Werden des Gegenstandes eindringen und die wesentlichen Gesetze der Geometrie genetisch ableiten müsse, andererseits auf der Forderung der Pädagogik, daß die Seele in ihrer Totalität als Einheit von Denken und Anschauen aufgefaßt, und namentlich die mathematische Phantasie als das eigentliche Element aller mathematischen Thätigkeit geübt werden müsse. Wir gehen nun zur Darstellung der Methode über, die diesen Anforderun-

---

dagogischen Gründen zu verwerfen. Ueberdies ist es weniger Zweck dieser Schrift, das Alte einzureißen, als etwas Neues aufzubauen.

gen genügt, müssen jedoch zuvor einen Blick auf die äußere Anordnung des mathematischen Schulunterichts werfen. Wir legen dabei, um einen Anhaltepunkt für unsere Betrachtung zu gewinnen, die Lehrverfassung der königlichen Realschule in Berlin*) zu Grunde und betrachten den Lehrplan des mathematischen Unterrichts, der im Jahresbericht 1844 bekannt gemacht ist und im Wesentlichen wol mit dem auf den meisten Schulen befolgten Plan übereinstimmt, daher wir ihn als Muster eines nach der alten Methode eingerichteten Lehrplanes ansehen und beurtheilen können.

Der geometrische Unterricht ist dort auf 6 Klassen vertheilt, die der Schüler etwa in 6—8 Jahren (etwa vom 10ten bis zum 16ten oder 18ten Jahre) durchmacht, und die in zwei Perioden (die Mittelschule und die Realschule, die etwa dem Knabenalter und dem Jünglingsalter entsprechen) zerfallen**). In den einzelnen Klassen wird folgendes gelehrt:

Mittelschule.

Oberquarta. Die Lehre von den geraden Linien und von den Winkeln.

Untertertia. Die Lehre von der gegenseitigen

---

*) Daß wir eine Realschule und nicht ein Gymnasium wählen, hat seinen Grund darin, daß der mathematische Unterricht auf dem Gymnasium oft vernachlässigt wird, während er für die Realschule von größerer Bedeutung ist und sich auf diesen Anstalten systematischer entwickeln muß.

**) Da das durchschnittliche Lebensalter der Schüler in dem Jahresbericht nicht angegeben ist, so muß man die hier angegebenen Zahlen aus den Schulnachrichten folgern, wobei natürlich ein kleiner Irrthum möglich ist.

Abhängigkeit der Grundbestandtheile, von der Kongruenz und den Transversalen der Dreiecke, die Elementarsätze vom Kreise und leichtere Aufgaben aus diesem Gebiet.

Realschule.

Obertertia. Das Viereck und das Vieleck. Flächenvergleichung ebener Figuren und leichtere Aufgaben.

Untersecunda. Die Lehre von der Aehnlichkeit ebener Figuren und der Schluß der Kreislehre.

Obersecunda. Wiederholung der ganzen ebenen Geometrie in ihren Hauptphänomenen, nebst schwierigeren Aufgaben. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Die synthetische und analytische ebene Trigonometrie.

Prima. Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Man sieht hier einen ununterbrochenen Fortschritt von den Anfangsgründen bis zur sphärischen Trigonometrie; man muß indessen, von der Eintheilung in Mittelschule und Realschule abgehend, zwei Haupttheile des Lehrganges unterscheiden; die ebene Geometrie wird in 4 Klassen elementar behandelt, dann tritt in den beiden obersten Klassen die algebraische Geometrie, die Stereometrie und die Trigonometrie ein. Bleiben wir zunächst bei der ebenen Geometrie stehen, so werden darauf vier bis fünf Jahre verwandt. Dies wäre bei dem geringen Umfange des Stoffes kaum zu begreifen, wenn man nicht in der dem Lehrplan vorausgeschickten Abhandlung über die Methode des Unterrichts (S. 34) läse: Ein zweites Hauptersorderniß eines förderlichen Unterrichts ist

ein **langsames**, anfänglich **sehr langsames** Vorwärtsschreiten. Denn sind auch die Sachen an sich einfach und leicht, so sind sie es darum noch nicht für den Anfänger, sie machen ihm im Gegentheil bedeutende Schwierigkeiten, und oft um so bedeutendere, je leichter sie sind. Ich will in dieser Beziehung nur an die aus der Metaphysik entlehnten Sätze der ebenen Geometrie erinnern, welche eine außerordentliche Umsicht und Behutsamkeit von Seiten des Lehrers in Anspruch nehmen, wenn sie der Anfänger, seinem Bildungsstande angemessen, klar erfassen soll." — Nach diesen Grundsätzen wird also ein ganzes Jahr (wöchentlich 3 Stunden) auf die Lehre von den geraden Linien und von den Winkeln verwendet; erst im 2ten Jahre hört der Schüler etwas vom Dreieck und vom Kreise; im 4ten Jahre erst erfährt der Schüler, was Aehnlichkeit sei u. s. w. Dieses Mißverhältniß ist allein schon im Stande, jede Lust an der Geometrie zu ersticken, dieser „sehr langsame Fortschritt" muß das Interesse lähmen. Und womit wird die lange Zeit ausgefüllt? Mit einer „außerordentlich umsichtigen und behutsamen" Behandlung von „Sätzen, die an sich leicht und einfach sind," von Sätzen der ebenen Geometrie, die „aus der Metaphysik entlehnt" sind. Diese aus der Metaphysik entlehnten Sätze können keine andern sein, als die bekannten Axiome, z. B. daß das Ganze größer sei als sein Theil, daß zwei Größen, die einer dritten gleich sind, einander gleich seien, oder der sogenannte Satz exclusi tertii (daß nämlich jedes Ding eine Eigenschaft entweder habe oder nicht habe); auch wird man eine bedeutende Zeit darauf verwen-

den, die metaphysischen Lehren über die Definition und über den Syllogismus umsichtig und behutsam zu erläutern. Und damit martert man (noch dazu auf einer *Realschule*,) Knaben von 11—12 Jahren, denen freilich eine metaphysische Behandlung dessen, was an sich einfach und leicht ist, um so bedeutendere Schwierigkeiten machen wird, je leichter es ist. Auf solchem Wege hofft man, wie der Jahresbericht sagt, die *Urtheilskraft zu schärfen* und überhaupt eine *formale Verstandesbildung* zu begründen; denn diese wird im *Knaben*alter gefördert: „durch die Bestimmtheit und Genauigkeit der Definitionen und der mit Klarheit aus ihnen hervorgehenden Begriffe, durch die Strenge und Folgerechtigkeit einzelner Schlüsse und ganzer Beweise, durch die logische Entwickelung der wissenschaftlichen Form überhaupt." — Ja, wenn dies ein Lehrplan für Studenten wäre! Bei *Knaben* aber, die überdies nicht einmal Metaphysiker, sondern Baumeister, Fabrikanten, Kaufleute 2c.*) werden wollen, kann eine solche Methode nur alle Lernlust lähmen, und es ist nicht zu verwundern, wenn auf solchem Fundamente nachher auch nur langsam weiter gebaut werden kann.

Doch genug der Kritik. Wenn der oben ausgesprochene Satz wahr ist, daß der Gang des Unter-

*) Ich lege auf diesen Zusatz wenig Gewicht. Wer etwas on Psychologie versteht und die verschiedenen Entwickelungsufen der Seele kennt, der muß einen solchen Gang des Unrrichts auch für den künftigen Metaphysiker und Mathemaker nachtheilig finden.

richts durch die Entwickelung der Seele bedingt wird, und die Darstellung sich an die in der Seele vorhandenen Regungen und Vorstellungen anknüpfen muß; so ergibt sich mit innerer Nothwendigkeit ein ganz anderer Lehrplan. Allerdings muß man das Knabenalter vom Jünglingsalter unterscheiden; im Knaben ist Phantasie und Anschauung noch vorwaltend thätig; erst mit dem 14ten oder 15ten Jahre entwickelt sich der Verstand auf eine energischere Weise. In allen Fächern kann daher erst mit dem Jüngling ein streng wissenschaftlicher Unterricht begonnen werden; ja die Forderungen der absoluten Wissenschaft, der Metaphysik begreift erst der erwachsene Mann. Und wie man in allen andern Unterrichtsfächern schon längst für die verschiedenen Entwickelungsstufen der Schüler verschiedene Darstellungsweisen hat (eine elementare und eine rein wissenschaftliche), deren jede aber den ganzen Stoff*) umfassen muß; so muß es auch mit der Mathematik geschehen. Ehe man sie als Wissenschaft in streng

*) Man vergleiche nur die alte und die neue Methode des Sprachunterrichts; sonst wurde in der untersten Klasse die Deklination, in der folgenden die Konjugation gelernt rc. und der Schüler konnte sich glücklich preisen, wenn er im dritten Lehrjahre an Sätze kam, wobei sich allenfalls etwas denken ließ. Jetzt ist das wenigstens anerkannt, daß man dem Schüler erst eine Anschauung vom Satze und seinen Hauptverhältnissen geben muß, daß er also das ganze Bereich der Grammatik schon im Keime überschaut, und eine Vorstellung von der Bedeutung jener Operationen gewinnt, die ihm so viel Zeit und Mühe kosten. Aehnlich verhält es sich mit allen Unterrichtsgegenständen.

wissenschaftlichen Formen darstellt, muß der Schüler in einem anschaulichen Elementarkursus mit dem Gebiete der Geometrie, mit den wesentlichen geometrischen Gebilden und Gesetzen vertraut gemacht werden. Man darf sich dabei nicht auf Linien und Winkel, ja nicht einmal auf die Planimetrie beschränken, sondern in großen Zügen muß das Wesentliche aus der Planimetrie und Stereometrie dem Schüler vorgeführt werden, so daß er etwa nach Verlauf von 2—3 Jahren die Hauptpunkte der gesammten Geometrie kennt. Denn da man dabei nicht gegen den mächtigen Strom ankämpft, der die Seele des Knaben unaufhaltsam auf das Gebiet der lebendigen Anschauung treibt, da dem Schüler hier das Leichte wirklich leicht wird, so kann man ohne Gefahr viel rascher vorwärts schreiten, als dies gewöhnlich geschieht. Man erläutere und begründe nur die wesentlichen Lehrsätze (etwa wie sie im Leitfaden dargestellt sind) und präge sie dem Schüler so fest ein, daß diese geometrischen Kenntnisse ihm gleichsam zur anderen Natur werden. Die große Masse der Sätze aber, die für die elementare Darstellung nicht unumgänglich nothwendig sind, verspare man auf eine wissenschaftliche*) Darstellung, wo sie überdies allein in gehöriger, d. h. wissenschaftlicher Weise abgeleitet

*) Man mißverstehe hier und im Folgenden nicht den Ausdruck „wissenschaftliche Darstellung", als ob die elementare Behandlung durchaus unwissenschaftlich sein solle. Er soll nur bedeuten, daß der zweite Kursus umfassender, allgemeiner, strenger im Gange und der Anordnung sein müsse und sich mehr dem Verstande als der Anschauung anschließe.

werden können. So läßt sich z. B. die Lehre von den Transversalen im Dreieck, von der harmonischen Theilung und so manches andere erst dann im Zusammenhang und genetisch ableiten, wenn man die Winkelfunktionen mit berücksichtigen kann; erst dann kann man diesen Lehren ein wissenschaftliches Interesse abgewinnen. Dafür, daß man die Stereometrie schon früh in elementarer Weise lehre, spricht die psychologische Erfahrung, daß die Schüler in späteren Jahren, wenn die Thätigkeit der Phantasie schon durch das Uebergewicht des Verstandes gehemmt wird, sich die aus der Ebene heraustretenden Raumformen nur mit Mühe vorstellen können; auch ist es sehr zu berücksichtigen, daß nur dann der mathematische Unterricht die für andere Unterrichtszweige (Geographie, Zeichnen, Naturgeschichte) nothwendigen Vorkenntnisse zur rechten Zeit mittheilen und so in das Gesammtleben des Unterrichts fördernd eingreifen kann, während er nach der alten Vertheilung des Unterrichtsstoffes überall zu spät kommt*). Wenn wir jedoch vorschlagen, die gesammte Geometrie (nebst der Stereometrie) etwa in zwei (höchstens drei) Jahren in elementarer Weise zu absolviren, so setzen wir voraus, daß in dieser Zeit nur Geometrie, keine Arithmetik gelehrt werde**). Dies ist ja auch nur

---

*) So z. B. muß auf der Berliner Realschule der Zeichenlehrer erklären, was ein Prisma, Kegel 2c. ist, während der Lehrer der Mathematik sich noch mit geraden Linien und Winkeln beschäftigt.

**) Hierauf namentlich beruht die oben ausgesprochene Forderung, die Geometrie von allen rein arithmetischen Ele-

eine Folgerung aus der Scheidung des anschaulichen Elementarunterrichts von der erst im Jünglingsalter eintretenden wissenschaftlichen Darstellung. Denn die Arithmetik ist nichts anderes als die streng wissenschaftliche Darstellung der Zahlenlehre, deren elementare Behandlung den Rechenunterricht ausmacht. Wie nun der Rechenunterricht früher beginnen kann, als die elementare Geometrie, so kann man auch die Arithmetik vor der wissenschaftlichen Geometrie (algebraische Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, Elemente der Analysis) behandeln. Wenn man einstweilen die Geometrie ganz ruhen läßt, oder höchstens, wo es noth thut, Repetitionen anstellt, so kann man die wesentlichen Lehren der Arithmetik in einem Jahre absolviren, und alsdann behält man bei einem sechs- bis siebenjährigen Schulbesuch reichliche Zeit für die rein wissenschaftliche Darstellung der Mathematik; und bei dem lebendigeren Interesse, das bei einem solchen Lehrgange sich nothwendig des Schülers bemächtigt, bei der größeren Gewandtheit in rein mathematischen Operationen, die der Schüler gewinnt, wird man auch in der Folge mehr leisten können, als bisher bei der vorherrschenden Unlust und bei der mangelhaften Anschauung möglich war.

Nach diesen Bemerkungen über den Gang des Unterrichtes kommen wir zur Darstellung der Unter-

---

menten rein zu halten. Es ist aber auch an sich klar, daß allgemeine mathematische Begriffe, z. B. des Negativen, des Unendlichen, der Funktion, in geometrisch anschaulicher Behandlung viel leichter Eingang in den Vorstellungskreis der Schüler gewinnen, als auf dem Wege arithmetischer Abstraktion.

richtsmethode selbst. Aus dem Wesen der Geometrie ergaben sich als die beiden in ihrem Gebiete wirkenden Thätigkeiten die mathematische Phantasie, und der Verstand; die Pädagogik fordert, daß beide in beständiger Wechselwirkung geübt und entwickelt werden, so jedoch, daß anfangs die Phantasie und die begleitende Anschauung das Uebergewicht hat und der Verstand erst später in seine volle Herrschaft eintritt. Es ist ferner eine wesentliche Forderung der Pädagogik, daß der Schüler in möglichst vielseitige, seiner geistigen Entwickelung angemessene Thätigkeit versetzt werde. Wie dies zu bewirken sei, das ergibt sich zum Theil aus dem, was oben über den wissenschaftlichen Grund und die pädagogischen Zwecke der Methode gesagt worden ist, zum Theil aus den folgenden Betrachtungen über die Thätigkeiten, in denen sich das Leben der mathematischen Phantasie und des Verstandes im Bereiche der Schule äußert.

Es ist nämlich eine besondere Kunst, auf die Seele des Schülers wirklich einzuwirken, und es bedarf dazu eines besonderen Apparates; so läßt man z. B. beim Sprachunterricht einen Autor übersetzen, man analysirt Wortformen und Satzformen, man läßt Exerzitien schreiben und stellt die mannigfaltigsten Uebungen an, um den Zweck des Sprachunterrichts zu erreichen. In der Geometrie hat man bisher fast nichts der Art vorgenommen, höchstens mußte der Schüler Beweise, die im Lehrbuche nur angedeutet waren, ausarbeiten und geometrische Aufgaben lösen. Meistentheils aber bestand alle Thätigkeit des Schülers darin, daß er die Lehrsätze und ihre Beweise sich einprägte, wobei es denn oft vorkam, daß

er sie, ohne sie zu begreifen, bloß mit dem Gedächtniß erfaßte. — Allein der Verstand wird nur durch eigene Denkthätigkeit geübt und gestärkt, d. h. dadurch, daß der Schüler das Vorgetragene wirklich begreift und daraus selbständig Folgerungen und Schlüsse ableitet; ebenso kann die Phantasie nur dadurch entwickelt und gebildet werden, daß der Schüler sich die geometrischen Gestalten selbstthätig vorstellt und ihre Veränderungen und Verhältnisse innerlich wahrnimmt. Da jedoch die menschliche Seele im Verborgenen schafft und arbeitet, so muß der Lehrer seine Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Aeußerungen dieser an sich verborgenen Thätigkeit richten. Nun ist es deutlich, daß Phantasie und Verstand entweder rezeptiv wirken, Anschauungen und Begriffe von außen aufnehmend und in sich verarbeitend, oder produktiv, Gestalten bildend und urtheilend. Diesen Thätigkeiten des Geistes entspricht ein doppelter Gegensatz leiblicher Thätigkeiten. Die rezeptive Thätigkeit wird vermittelt durch sinnliche Aufnahme, die produktive Thätigkeit wird leiblich vermittelst der sinnlichen Darstellung. Die Phantasie nimmt ihren Stoff in sich auf durch Beobachtung, der Verstand vernimmt vermittelst des Gehörs durch Aufmerksamkeit. Die Phantasie stellt — in der Geometrie — ihre Gebilde dar durch Zeichnung, der Verstand stellt seine Urtheile dar durch Sprache. So entwickelt sich auf organische Weise ein Kreis von Thätigkeiten, die in stetem Zusammenhang und lebendiger Wechselwirkung, wie im Leben, so in der Schule jeden Fortschritt bedingen. Nur darf man beim Schüler, namentlich im Knabenalter,

wenig oder gar nicht an eine selbständige Produktion denken; selbst in der Mathematik, die doch ihrer apriorischen Natur wegen vor allen anderen Unterrichtsgegenständen dazu geeignet wäre, wird man höchst selten und nur bei den fähigsten Schülern Spuren einer ursprünglich produzirenden Thätigkeit finden; im Allgemeinen aber kann man nur fordern, daß er reproduzire. Ferner ist es deutlich, daß auf der Schule der objektive Werth des Produzirten keineswegs letzter Zweck ist, sondern daß es nur auf Uebung der dazu erforderlichen Kräfte ankommt, daß aber die Schätzung des Produzirten (der Leistungen des Schülers) das einzige Mittel ist, wodurch der Lehrer in den geistigen Zustand des Schülers Einsicht gewinnt, woraus er schließen kann, ob der Unterricht wirklich den gewünschten Einfluß auf die Bildung der Phantasie und des Verstandes gehabt habe. Denn worauf es beim Unterricht allein ankommt, das ist jene innerste, dem Lehrer an sich verborgene Thätigkeit der Seelenkräfte, durch welche der Schüler sich die Wissenschaft aneignet und fähig wird, sein Wissen praktisch anzuwenden. Die Entwickelung dieser Thätigkeit wird aber bedingt durch Beobachtung der Außenwelt und Aufmerksamkeit auf den Gedankengang des Lehrers; sie äußert sich und bewährt sich durch Reproduktion vermittelst der Zeichnung und der Sprache*). Der geometrische Unterricht beruht

*) Es bedarf für den Pädagogen nicht der Erinnerung, daß Gewandtheit im Zeichnen wie im Sprechen noch von anderen Bedingungen abhängig sind. Flüchtigkeit, Trägheit, namentlich Ungelenkigkeit der Hand oder der Zunge lassen oft

also auf der Uebung dieser vier Thätigkeiten. Allein man denke ja nicht, daß die Scheidung, die der Methodiker machen muß, namentlich zwischen dem Verstand und der Phantasie, auch eine Trennung der zwei Reihen beim Unterricht bedingen müsse. Vielmehr greifen diese sämmtlichen Thätigkeiten beständig in einander; und wenn auch in der ersten Zeit die Thätigkeiten der Phantasie mehr hervortreten, so darf man doch die Einwirkung auf den Verstand und die Mitwirkung des Verstandes nie aus den Augen lassen. Der Schüler muß nicht allein mit der Phantasie sich innerlich vorstellen, was er mit den Augen angeschaut hat, und dann zeichnen, was er sich vorstellt; er muß nicht allein verstehen und begreifen, was er aufmerksam hört, und dann aussprechen, was er begriffen hat; sondern er muß auch angehalten werden, was er anschauet, mit dem Verstande zu verarbeiten und mit der Sprache darzustellen, ferner, was er begriffen und mit dem Verstande erfaßt hat, zu einem Bilde zu gestalten und durch Zeichnung darzustellen. Bei diesen Uebungen ist aber ins Besondere darauf zu sehen, daß jede Geistesthätigkeit in ihrer vollen Energie und unvermischt mit anderen Elementen wirke. Dies ist namentlich wichtig in Bezug auf die Sprache, wie weiter unten angedeutet werden soll.

Indem wir uns, was den Prozeß des Denkens und Anschauens selbst betrifft, auf das berufen, was

---

die Leistungen eines Schülers sehr gering und mangelhaft erscheinen, wenn auch jene Thätigkeit des Geistes in voller Kraft vorhanden ist.

oben über den wissenschaftlichen Grund der Methode gesagt ist, fügen wir hier noch einige Bemerkungen bei, um zu erläutern, welcher äußeren Mittel der Unterricht sich bedienen muß, wenn er wirklich auf die Bildung und Entwickelung des Schülers einen nachhaltigen Einfluß gewinnen will.

Beobachtung.

Die Thätigkeit der Beobachtung ist eine zwiefache, je nachdem man die Qualität oder die Quantität des beobachteten Gegenstandes berücksichtigt. Von der Beobachtung der Quantität, d. h. vom Messen, soll nachher gesprochen werden.

Die Qualität, Wesen und Eigenschaften der Raumgrößen, kann der Schüler erst dann beobachten, wenn er eine Vorstellung von der Entstehung der Raumgröße hat. Im Allgemeinen knüpft sich jede Vorstellung zunächst an sinnliche Wahrnehmung; von dieser muß also ausgegangen werden, jedoch muß man sich bemühen, den Schüler sobald als möglich von dieser Abhängigkeit von den Sinnen zu befreien. Was zunächst die Elemente betrifft, so ist die Entstehung der geraden und krummen Linie durch die Bewegung eines Punktes leicht auch sinnlich darzustellen; man braucht ja nur auf der Wandtafel mit der Kreide beliebige Züge zu thun. Thut man die Züge mit einem nicht abfärbenden Mittel (mit der Spitze eines Lineals rc.), so ist der Schüler schon genöthigt, die dadurch entstandene Linie ohne Hülfe der Sinne sich vorzustellen; es ist zugleich eine gute Uebung der Aufmerksamkeit, wenn man den Schüler auffordert, auszusprechen, ob das unsichtbare Resul-

tat einer gewissen Bewegung eine gerade oder eine krumme Linie sei. — Die Entstehung der Fläche aus der Bewegung einer Linie ist schon nicht mehr mit gewöhnlichen Mitteln sinnlich darzustellen; doch kann man diese Vorstellung leicht durch Bewegung einer hölzernen Linie*) erwecken, und man wird finden, daß die Schüler nicht allein leicht in diese Vorstellung eingehen, sondern auch mit Freuden jede weitere Bewegung, die nicht mehr sinnlich darzustellen ist, mit der Phantasie nachkonstruiren; und man braucht sich nicht zu scheuen, namentlich mit fähigeren Schülern, weiter, selbst über das Gebiet der ebenen Geometrie hinaus zu gehen.

Hat man die ersten Vorstellungen, der einfachsten durch Bewegung erzeugten Gebilde, im Schüler erweckt, so muß man ihm in der Realität die Analogien nachweisen, und ihn, wo nur das Resultat der Bewegung vorliegt, die geometrische Entstehung nachweisen lassen. Drehbank und Webstuhl lassen sich auf drehende und parallele Bewegung (§. 5) zurückführen; ja im Trivialsten, das eben wegen seiner Trivialität dem Schüler am nächsten liegt, suche man Linie, Winkel, Rechteck ꝛc. zu erkennen. Es ist in dieser Beziehung eine bedeutende Hülfe für den Unterricht, daß er gerade bei den ersten wichtigsten

*) Es ist bei dieser und den folgenden Uebungen äußerst zweckmäßig, lange, möglichst dünne Holzstäbchen anzuwenden, mit denen sich auf eine sehr einfache Weise jede Bewegung einer geraden Linie versinnlichen läßt. Auch ist es zu empfehlen, einige derselben mit feinen Stiftchen zu versehen, so daß man sie in beliebiger Lage an der Wandtafel befestigen kann.

Schritten an so viel tausend Dinge in der Umgebung des Knaben anknüpfen kann; indessen wähle man mehr Beispiele der Art, daß der Schüler, von der sinnlichen Anschauung verlassen, die geometrische Erscheinung selbstthätig und mit der Phantasie zu schaffen veranlaßt wird.

Nach solchen Uebungen wird es dem Schüler leicht werden, nicht nur verwickeltere geometrische Gebilde in sich zu erzeugen, sondern auch sie selbst in der Phantasie in Bewegung zu setzen und die dabei vorkommenden Erscheinungen anzuschauen. Man wird freilich, besonders um der schwächeren Schüler willen, immer den alten Gang von der sinnlichen Anschauung ausgehen müssen; allein man gebe auch das Streben nicht auf, namentlich bei Wiederholungen bloß mit dem innern Sinn zu arbeiten; das ist freilich nur möglich bei einer etwas geübten Sprachfertigkeit, und selbst mit dieser Hülfe wird man anfangs nur langsamere Fortschritte machen können, als bei beständiger Beziehung auf eine vorgezeichnete Figur. Allein es ist kaum zu berechnen, wie sehr der mathematische Sinn geübt wird, wenn man die innere Anschauung hinreichend übt. Im Leitfaden sind an geeigneten Stellen Winke und Andeutungen gegeben, die man nicht ungenutzt lasse; auch werden wir, wo von der Uebung der Sprache die Rede ist, wieder hierauf zurückkommen.

Da die Elemente der Geometrie hauptsächlich auf der Lehre vom Dreieck und von der gegenseitigen Abhängigkeit seiner Seiten und Winkel beruhen, so ist es von besonderer Wichtigkeit, die verschiedenen Erscheinungsformen dieser Abhängigkeit recht lebendig

zu ergreifen. Zu diesem Zwecke ist es nicht rathsam, mehrere Dreiecke von verschiedener Gestalt zu zeichnen, denn dadurch gewinnt der Schüler eine Anschauung nur von verschiedenen Gestalten, aber nicht von der Veränderung der Gestalt selbst. Man bezeichne vielmehr das Dreieck nur durch drei Punkte, von denen zwei (mit Kreide gezeichnet) fest sind, während der dritte*) beweglich ist, und lasse den Schüler zunächst bloß das Dreieck beschreiben, z. B. die eine Seite ist fast 2mal, die andere nicht ganz 2mal so groß als die Grundseite, der eine Winkel (rechts an der Grundseite) ist etwa 40° groß u. s. w. Dann mache man ihn auf die Veränderungen der Winkel und der Seitenverhältnisse aufmerksam, und lasse sie den Schüler aussprechen. Bei unfähigeren Schülern wird man füglich vom rechtwinkligen Dreieck ausgehen und dabei beständig an die Lehre über die Ortsbestimmung (Leitfaden Kap. 2) anknüpfen. Fähigere Knaben werden die Winkel und die Seitenverhältnisse ziemlich genau angeben, auch über die Höhen und Abschnitte der Seiten leicht Auskunft geben. — Später muß man zusammengesetzte Figuren auf dieselbe Weise behandeln, dabei aber den Schüler daran gewöhnen, jede drei Punkte sogleich zu einem Dreieck zu verbinden und die Gestalt dieser Dreiecke zu erläutern.

Im Ganzen können wir, was die Beobachtung der Formen betrifft, auf Herbart's ABC der

---

*) Man bediene sich auch hierzu der oben beschriebenen hölzernen Linie, mit deren Endpunkte man die verschiedenen Bewegungen und Lagen des dritten Punktes andeutet.

Anschauung verweisen, nach dessen Anleitung man diese Uebungen, wo die Zeit ausreicht, auf sehr mannigfaltige Weise erweitern kann.

Das Messen ist eine nothwendige Ergänzung der Beobachtung, und da man diesen wesentlichen Punkt bisher nur zu sehr vernachlässigt hat, so muß hier etwas weitläufiger darüber gesprochen werden. Man mißt entweder bloß mit dem Auge (nach dem Augenmaß), oder mit Instrumenten. Das Augenmaß kann, wenn es einigermaßen geübt wird, zu großer Genauigkeit gebracht werden, wovon freilich diejenigen, die es nie geübt haben, keinen Begriff haben. Auch ist nicht zu leugnen, daß es besonders in einer zahlreichen Klasse fast unmöglich ist, umfassendere Uebungen zur Bildung des Augenmaßes anzustellen. Indessen läßt sich doch Einiges thun, und man sollte das um so weniger versäumen, als Knaben an der Kunst, bloß mit einem Blicke zu messen, so großes Gefallen finden, daß sie sich gern für sich weiter darin üben. Da eine größere oder geringere Entfernung vom Auge alle Längen verschieden erscheinen läßt, so kann man eine Länge immer nur schätzen in ihrem Verhältniß zu einer andern in derselben Entfernung befindlichen, aber bekannten Länge, z. B. die Länge eines Striches an der Tafel muß man mit der Größe der Tafel vergleichen ꝛc. Winkel lassen sich nur dann abschätzen, wenn keine perspektivische Täuschung Statt findet. Aber wenn auch Uebungen der Art keinen weiteren Erfolg hätten, als daß die Schüler auf die Erscheinungen der Perspektive, auf Verhältnisse ꝛc. aufmerksam würden, so hat man einen hinreichenden Gewinn. Nur gehe

man dabei nicht allzu systematisch zu Werke! sonst müßte man die Uebungen des Augenmaßes aussetzen, bis die Lehre von den Verhältnissen, oder gar der Perspektive vorgetragen wäre, und alsdann würde der Gewinn nicht bedeutend mehr sein; denn man muß, wo Uebung der Sinne erreicht werden soll, früh anfangen, und man kann dies um so eher, da ja das Augenmaß nur Längen und Winkel abschätzen kann.

Umfassender sind die Messungen mit Instrumenten. Diese werden bisher auf Schulen wenig, und meines Wissens nur im Großen, d. h. im Freien betrieben. Die Einführung des Feldmessens auf unsre Schulen hat aber einige Schwierigkeit; jedenfalls kann man nur mit geübteren Schülern, die einen weiteren (physischen und geistigen) Gesichtskreis haben, auf einigen Erfolg beim Feldmessen rechnen. Doch wird dieser Erfolg sich bedeutend steigern, wenn man den Uebungen im Großen zuvor Uebungen im Kleinen vorausgeschickt hat, die sich ans Zeichnen anschließen und mit Zirkel und Meßtafel (vergl. die kleine Tafel beim Leitfaden, die ein Winkelmaß, Zollmaß und ein verjüngtes Maß enthält) angestellt werden können. Es ist schon viel werth, daß der Knabe solches Handwerkszeug gebrauchen lernt und sich bemühet, sorgfältig und genau damit zu arbeiten; namentlich erfordert der Zirkel einige Uebung, und wenn die Resultate der Messung einigermaßen genau sein sollen, so muß der Schüler sich schon viel Mühe gegeben haben. Es sind aber außer der Uebung des Auges und der Hand, außer der Gewöhnung zur Genauigkeit und Sorgfalt, noch zwei wesentliche Vortheile mit diesen Zirkelmessungen verknüpft. Einmal

nämlich ergibt sich hier eine praktische Bestätigung der Lehre von der Kongruenz; wenn z. B. die Aufgaben des §. 38 gelöst werden, wo aus drei Bestimmungsstücken Dreiecke zu zeichnen und die fehlenden Stücke zu messen sind, so werden bei genauer Arbeit die Resultate der Messung ziemlich übereinstimmend sein. Zweitens aber wird eben das unvermeidliche Schwanken der Antwort, die Ungenauigkeit der Resultate im Schüler selbst den Gedanken anregen, daß es doch nothwendig ein besseres Verfahren geben müsse; und wenn gar der Lehrer ihm sein, durch Rechnung gefundenes Resultat vorhält, so wird er einen erstaunten Blick in die ferneren Regionen der Wissenschaft werfen und nothwendig von einem gewissen Verlangen darnach erfüllt werden; er wird gern seine Anstrengungen verdoppeln, um bald auch so merkwürdige Dinge leisten zu können.

Von deu Meßübungen auf dem Papier ist der Uebergang zu unmittelbaren Messungen in der Wirklichkeit sehr leicht. Zu Längenmessungen dient eine Meßkette, und da es aus pädagogischen, wie aus pekuniären Gründen vorzuziehen ist, den Instrumenten so viel als möglich zu entsagen, das Schrittmaß. Man mißt nämlich eine hinreichende Strecke (etwa 500 Fuß) mit der Meßkette ab, und läßt alsdann jeden Schüler wiederholt versuchen, wie viel Schritt er auf der abgemessenen Strecke macht. Nun muß entweder der Schüler bei weiteren Messungen jede Zahl seiner Schritte vor der Aufzeichnung durch Rechnung in Fuß verwandeln (und dies ist für den Anfang deutlicher und also zweckmäßiger) — oder jeder Schüler muß sich einen eignen Schrittmaßstab

zeichnen und die gemessenen Längen danach unmittelbar einzeichnen. Die Resultate dieser Messungen werden freilich noch sehr ungenau sein, zumal da Knaben in der Regel noch keinen regelmäßigen Schritt haben; allein es kommt ja weniger auf die Resultate an, als auf eine pädagogisch bildende Beschäftigung. Man muß bei diesen Uebungen vom Allereinfachsten ausgehen, und es wird am zweckmäßigsten sein, mit dem Messen denselben Gang zu gehen, den der Unterricht nimmt. Wenn man also den Leitfaden gebraucht, so wird man erst Rechtecke messen und zeichnen lassen, seien es nun Zimmer oder Häuser, Gärten oder öffentliche Plätze; dann wird man die Lage einzelner Punkte durch Höhe und Abschnitt (Ordinate und Abszisse) ausmessen, wobei eine gerade Straße oder eine mit Stangen abgesteckte Linie als Richtlinie angenommen werden muß; jedoch muß dabei auf eine richtige Schätzung des rechten Winkels besonders Acht gegeben werden. Endlich wird man zur Ausmessung eines Grundstücks u. s. w. übergehen, und dabei namentlich nicht versäumen, an die Ausmessung auch Berechnung des Flächeninhalts anzuknüpfen.

Als Schlußstein dieser Uebungen sind die Messungen mit dem Meßtisch anzusehen, mit dem man allein im Stande ist, ein einigermaßen genaues Resultat zu gewinnen. Doch muß dabei das sogenannte Croquiren, d. h. das Aufnehmen nach Schritten, stets fortgesetzt werden. Denn da die Aufstellung und Orientirung des Meßtisches etwas beschwerlich ist, so stellt man ihn nur an den wichtigsten Punkten auf und bemüht sich nur, möglichst viele einzelne

Punkte auf dem Meßtisch genau zu bestimmen; die Zwischenräume läßt man von den einzelnen Schülern mit Schritten aufnehmen. Für den Anfang darf man es, namentlich bei beschränkter Zeit, kaum wagen, eine Gegend aufzunehmen, sondern man suche zunächst Aufgaben der Art zu lösen, wie sie im Leitfaden §. 30 und 32 angedeutet sind; man messe die Breite eines Flusses, die Entfernung einzelner Punkte u. s. w. Erst allmählig kann man zu verwickelteren Aufgaben fortschreiten.

Da Uebungen dieser Art für Knaben etwas außerordentlich Reizendes haben, da es aber zugleich sehr schwierig ist, viele Schüler zugleich zu beaufsichtigen und gehörig anzuweisen, so ist es rathsam, die Theilnahme an diesen Uebungen nur als eine Auszeichnung und Belohnung für die Tüchtigeren, namentlich für die zu gestatten, welche im Zeichnen einige Gewandtheit haben. Auch muß man die Arbeit gehörig theilen. Die, welche am saubersten zeichnen, müssen die einzelnen Messungen zu Hause auf den Meßtisch auftragen. Wer einen sicheren regelmäßigen Gang hat, der muß die wichtigsten Längen abschreiten u. s. w.

Zeichnen.

Ueber das Zeichnen ist im Ganzen wenig zu sagen. Die Wichtigkeit und Nützlichkeit des geometrischen Zeichnens wird wol allgemein anerkannt, und es ist kaum zu begreifen, daß es auf den meisten Schulen so spät oder gar nicht geübt wird.

S a u b e r k e i t und G e n a u i g k e i t sind die beiden Hauptforderungen; sie sind nicht allein für die

Sache selbst durchaus nothwendig, sondern auch in pädagogischer Beziehung von großer Bedeutung. Im Anfang hat man viel zu thun, damit der Schüler nur Zirkel, Lineal und Reißfeder gebrauchen lerne; es ist für den Anfänger sogar schwer, eine reinliche gerade Linie oder einen Kreis zu ziehen; doch bleibe man nicht zu lange bei den ersten Anfängen stehen, die leicht langweilig werden.

Die Uebungen im Zeichnen lehnen sich entweder an den Unterricht selbst an, oder an die Meßübungen, oder sie treten selbständig auf. Was das erste betrifft, so muß der Schüler sich sämmtliche Figuren zur Geometrie, wie sie gewöhnlich den Lehrbüchern beigegeben sind, selber zeichnen. Die Forderung, daß er jeden Lehrsatz, jede geometrische Erscheinung zu Hause durch Zeichnung darzustellen habe, erhöht einerseits die Aufmerksamkeit in der Stunde, und trägt andererseits sehr dazu bei, die gewonnene Erkenntniß fester einzuprägen. Der Schüler muß in einem besonderen Hefte Zeichnungen zu sämmtlichen Lehrsätzen machen, und es wird überdies zweckmäßig sein, daß er zu jeder Zeichnung den zugehörigen Lehrsatz aufschreibe. Der Zusammenhang zwischen der Zeichnung und dem Lehrsatz läßt sich, wie das gewöhnlich geschieht, durch Buchstaben angeben; vielleicht ist es aber vorzuziehen, daß man die verschiedenartigen Linien, so weit es nöthig ist, verschieden zeichne, z. B. die Hülfslinien punktire u. dergl. m. Daß man jede Zeichnung erst in der Klasse einige Male von Schülern an die Wandtafel muß zeichnen lassen, versteht sich wol von selbst.

Die zweite Art des Zeichnens ist die Darstellung

vermessener Gegenstände. Man fange auch hier mit dem Einfachsten an, lasse erst bloße Rechtecke (Fenster, Thüren 2c.) zeichnen und gehe allmählig zu vollständigem Planzeichnen über, wobei man sich an die Technik und Symbolik der Feldmesser zu halten hat.

Endlich ist noch eine dritte Uebung sehr zu empfehlen, nämlich, wenn ich mich so ausdrücken darf, das geometrische Kunstzeichnen. Man kann bekanntlich durch Verknüpfung von allerlei regelmäßigen Figuren gar schöne, für das Auge erfreuliche Zeichnungen machen, die auch in der Ornamentik eine bedeutende Rolle spielen; namentlich läßt sich aus dem Sechseck eine Menge sinnreich verschlungener Figuren bilden, zumal wenn man die Linie zu einer Leiste (oder Streifen) von verhältnißmäßiger Breite werden läßt, wie sie z. B. in vielen italiänischen Mosaiken erscheinen. Bei fortschreitender Uebung kann man den Kreis hinzunehmen und aus verbundenen Bogen allerlei schöne Figuren bilden, bis man zuletzt zu wirklichen architektonischen Zeichnungen, namentlich in gothischem Stile übergeht, Portale, Fenster, Gewölbe u. dergl. zeichnen läßt. Daß es hierzu, meines Wissens, noch an genügenden Vorlegeblättern fehlt, ist kein Hinderniß; vielmehr wird es zur Uebung des Auges und der Aufmerksamkeit des Schülers sehr zweckmäßig und bei einiger Gewandtheit des Lehrers auch möglich sein, daß der Schüler nach Andeutungen des Lehrers und einer bloß skizzirten Vorzeichnung an der Wandtafel dergleichen Zeichnungen zu Hause mache. Kann man ihm zuweilen schöne Muster zeigen, so wird das seinen Eifer vermehren. Dergleichen Uebungen, die

nit der abstrakten Wissenschaft in keiner Ver-
zu stehen scheinen, halte man dennoch nicht
flüssige Spielerei. Wenn zu einer allseitigen
ıtischen Bildung nicht nur Einsicht in die
der Geometrie, sondern auch Schärfe und
keit des beobachtenden Auges und Sicherheit
ıauigkeit der darstellenden Hand erforderlich
ı überhaupt der Sinn für Raumformen ge-
ıd allmählig zum Gefühl der Schönheit räum-
estalten geadelt werden soll, so muß man
ebungen nicht gering anschlagen, die in ho-
ade geeignet sind, anfangs technische Fertig-
nn aber auch phantasievolle Produktion und
ɔe Beurtheilung der Raumformen zu fördern
entwickeln.

Aufmerksamkeit.

; der Schüler aufmerksam sein müsse, ist zwar
gemeine pädagogische Forderung, und somit
erüber nichts Besonderes zu sagen. Doch ist
che von zu großer Wichtigkeit, als daß wie-
e Erinnerungen schaden könnten.

ın verwechselt zu leicht mit der eigentlichen
ksamkeit, welche eine der intensivsten Seelen-
iten ist, jenen Zustand der Ruhe, wo die
es Schülers von keinen fremdartigen Vorstel-
beschäftigt wird, und nun erst in Bewegung
verden soll. Viele Lehrer begnügen sich da-
ß der Schüler ruhig sitzt, nicht schwatzt und
ich den Lehrer mit dem Auge fixirt, und sie
ın es, daß diese äußerliche Ruhe und Unbe-
eit nur zu oft mit einer geistigen Unbeweg-

lichkeit und Starrheit verbunden ist, die jeden raschēren Fortschritt unmöglich macht. Aeußerliche Ruhe ist zwar bei vielen Menschen eine Bedingung geistiger Thätigkeit; aber diese wird nicht nothwendig durch jene herbeigeführt; ja eine recht intensive geistige Arbeit und Bewegung einer Klasse wird sich oft in einer gewissen Unruhe äußern, die man nicht mit zu ängstlicher Polizeilichkeit unterdrücken sollte.

Auf der andern Seite ist es nicht möglich, einen Schüler etwa vier Stunden lang in beständiger geistiger Erregung und intellektueller Thätigkeit zu erhalten; nur die Fähigeren halten eine starke Anspannung des Geistes eine Stunde lang aus, ohne matt zu werden. Man hat daher beim Unterricht auch für Ruhepunkte zu sorgen, oder wenigstens für einen Wechsel der Thätigkeiten. Wenn man so mit den Kräften der Jugend haushälterisch verfährt, so kann man zu gehöriger Zeit auch bedeutenge Leistungen in der Aufmerksamkeit fordern. Man dulde z. B. nicht, daß der Schüler sich allerlei notire, um seiner Schlaffheit zu Hülfe zu kommen; man fordere von ihm, daß er die wichtigsten Sätze gleich in der Stunde lerne und zugleich den — im Leitfaden immer nur angedeuteten — Gang der Entwickelung und Erläuterung sich fest einpräge *). Die verstandesmäßige

*) Ich habe die Erfahrung gemacht, daß fähigere Knaben, wenigstens in der Mathematik, mehr lernen und das Gelernte treuer als wirkliches Eigenthum in der Seele bewahren, wenn sie — ohne ein Lehrbuch oder ein diktirtes Heft — ausschließlich an das gesprochene Wort des Lehrers gewiesen sind und somit genöthigt werden, das Vorgetragene sich sogleich fe

Erkenntniß wird sehr gefördert und gehalten durch eine entsprechende Thätigkeit der Phantasie; denn diese hat ein treueres Gedächtniß, als der von jedem Bilde entblößte Verstand; daher muß man auch in dieser Beziehung sich hüten, die eine oder andere Thätigkeit zu sehr zu isoliren.

Sprechen.

Wenn die Aufmerksamkeit die Hauptbedingung der geistigen Thätigkeit ist, die sich aber nur anregen, nicht erzwingen läßt; so ist dagegen die Sprache das Hauptmittel, um den Geist des Schülers in Bewegung zu setzen, und zugleich der Prüfstein, durch den man sich überzeugen kann, ob der Schüler eine Einsicht gewonnen, und die geometrischen Gebilde und ihre Erscheinungen und Gesetze in sich geistig produzirt hat. Es ist daher auf die Sprache, auf die mündlichen Leistungen des Schülers eine viel größere Rücksicht zu nehmen, als bisher geschehen ist.

Die Mathematik bedient sich bekanntlich zweier Sprachen, einer — ihr eigenthümlichen — Zeichensprache und der gewöhnlichen Sprache, die man im Gegensatz Begriffssprache nennen kann. Da aber der mathematische Unterricht sich anfangs möglichst wenig von den dem Schüler geläufigen Vorstellungen lossagen, sich möglichst wenig isoliren darf, so ist es nothwendig, anfangs ausschließlich oder vorwaltend sich der allgemeinen, Jedem geläufigen Sprache zu

---

einzuprägen. Mit den Schwachköpfen siehts dann freilich schlecht aus; sie bedürfen eines Schulbuches, lernen aber auch dann nur wenig.

bedienen. Damit ist nicht gemeint, daß man die geometrischen Kunstausdrücke (kongruent, parallel, perpendikulär ꝛc.) vermeiden solle; vielmehr ist besondere Sorgfalt darauf zu verwenden, daß diese neuen Wörter für den Schüler wirkliche Begriffswörter werden, d. h. daß er sie nie höre, nie ausspreche, ohne sich den entsprechenden Begriff vorzustellen, was sich nur durch häufig wiederholte Fragen (was bedeutet das Wort kongruent? ꝛc.) erreichen läßt. Unter Zeichensprache ist zweierlei zu verstehen; das eine ist die algebraische Bezeichnung bestimmter Arten von Größen und Operationen durch bestimmte Buchstaben und Zeichen; so bezeichnet r den Radius jedes beliebigen Kreises, π die Ludolfische Zahl, $r^2\pi$ den Flächeninhalt jedes Kreises; hier drückt also das Zeichen einen Begriff, eine Vorstellung aus. Solche Zeichen haben also durchaus den Werth von Wörtern und Wörterverbindungen, sind aber wegen ihrer außerordentlichen Kürze nicht allein viel bequemer, sondern auch für die höhere Mathematik ganz unentbehrlich. Mit dieser Zeichensprache muß der Schüler allmählich vertraut gemacht werden, wovon weiter unten die Rede sein soll. — Etwas ganz Anderes ist es, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, die einzelnen Punkte einer Figur mit willkührlichen Buchstaben bezeichnet und danach Linien und Winkel benennt. Dies dient freilich auch sehr zur Erleichterung für denjenigen, welcher einen Lehrsatz, einen Beweis oder dergleichen aussprechen will. Indem er sich auf die vorliegende Figur bezieht, braucht er nun Linien und Winkel nicht erst durch ihre Beziehungen zur Figur zu bezeichnen, was oft Schwierigkeiten macht,

sondern er nennt sie nach den gegebenen Buchstaben. Allein dieser bequemere Weg ist für den Elementarunterricht aus pädagogischen Gründen ganz zu verwerfen. Zunächst wird man häufig die Erfahrung machen, daß es den Schülern schwer fällt, diese Benennung als etwas ganz Gleichgültiges anzusehen; sie werden ihre Vorstellungen an die Buchstaben knüpfen, und wenn man diese ändert, leicht verwirrt werden. Doch wäre das noch ein geringer Nachtheil, dem man durch einige Uebung abhelfen könnte. Viel bedeutender aber ist folgender Uebelstand. Wenn man die geometrischen Größen und ihre Verhältnisse immer nur nach den Buchstaben einer Figur benennt, so ist es außerordentlich schwer, dem Schüler das Gefühl der allgemeinen Gültigkeit und Nothwendigkeit der gefundenen Wahrheiten beizubringen. Bei der alten Methode fesselt man sich zunächst an die dem Auge vorliegende einzelne Figur; und genau genommen, müßte man zu jedem Beweise noch die verallgemeinernde Bemerkung hinzufügen, daß man unter ähnlichen Verhältnissen bei jeder Figur denselben Beweis führen könne, und daß demnach der Satz allgemein gültig sei. Und bei alledem wird man doch nie die geometrischen Gesetze so zu einem inneren und lebendigen Besitz der Schüler machen, wie wenn man sich von Anfang an möglichst von der sinnlichen Wahrnehmung, und also auch von der ganz äußerlichen Bezeichnung durch beliebige Buchstaben, frei macht, und dagegen die innere Anschauung und eine anschauliche Bezeichnung durch B e g r i f f s w ö r t e r übt. Freilich ist dies für Lehrer und Schüler anfangs beschwerlicher, allein der Erfolg vergilt reichlich die darauf

verwendete Mühe. In dieser Ueberzeugung habe ich den Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie so abgefaßt, daß die Sätze zu ihrem Verständnisse keiner Figur bedürfen*); und wenn man auch den Unterricht zunächst immer wird an eine Figur anknüpfen müssen, so wird es doch zweckmäßig sein, nirgends, wo es nicht dringend nothwendig ist, Buchstaben zu gebrauchen, und wenn man nicht umhin kann, lieber Linien, Winkel und Flächen selbst, als bloße Punkte mit Buchstaben zu nennen. Indessen wird es in den Elementen überall möglich sein, sich ohne die lästigen Buchstaben in gewöhnlicher Sprache deutlich zu machen. Wie viel dies die Auffassung erleichtern muß, wird man fühlen, wenn man z. B. die Fassung der oben aus dem Buche von Legendre angeführten Lehrsätze mit der im Leitfaden durchgeführten vergleicht; namentlich aber bei Hülfskonstruktionen und Beweisen fördert es außerordentlich das Verständniß, wenn man sie nicht auf zufällige Weise durch beliebige Buchstaben bezeichnet, sondern ihr Wesen vermittelst der Begriffssprache darstellt. Dadurch allein wird es möglich, den Schüler ganz von der sichtbaren Figur unabhängig zu machen und ihn dahin zu bringen, daß er den Inhalt eines Lehrsatzes im Geiste auf rein geistige Weise verarbeitet. Zwingt man ihn, sich erst mit einer Figur, aber ohne Buchstaben, dann ganz ohne Figur verständlich zu machen, und gelingt

*) Es war nicht möglich, diesen Grundsatz durchzuführen, ohne einige neue Ausdrücke, wie Gegenseite, Gegenwinkel, Grundlinie, Leitlinie, Grundseite rc. einzuführen, mit denen man sich leicht vertraut machen kann.

ihm eine klare Darstellung in reiner Sprache, so kann man überzeugt sein, daß er die Sache begriffen und sich wirklich angeeignet hat, und daß die Lehrsätze nicht wieder zugleich mit den erläuternden Figuren aus seiner Seele verschwinden. Freilich muß man, um durch die unbeholfene Sprache der Schüler nicht zu sehr gehemmt zu werden, schon früh auch in der Geometrie Sprechübungen anstellen, d. h. man muß die Schüler anfangs geometrische Gestalten und Erscheinungen, die ihnen durchaus deutlich sind, mündlich beschreiben und besprechen lassen; sie müssen die gegenseitige Lage der Linien einer Figur angeben, und namentlich, sobald man an zusammengesetzte Figuren kommt, die verschiedenen einfachen Elemente jeder Figur genau beschreiben können; man vergleiche, was unten bei der Lehre von den Parallelen gesagt ist, und die an verschiedenen Stellen des Leitfadens (z. B. §. 35 Aufg. 1) gegebenen Winke*). Ist man allmählig von einfacheren zu schwierigeren

*) Namentlich ist es wichtig, wo verwickelte Figuren auf Dreiecke zurückgeführt werden, diese Zurückführung deutlich zu besprechen. Wenn z. B., um einen ganz einfachen Fall zu wählen, das Parallelogramm durch die Diagonale in zwei Dreiecke zertheilt wird, deren Kongruenz nachgewiesen werden soll, so heißt es: jedes Dreieck wird aus zwei sich schneidenden Seiten des Parallelogramms und der Diagonale gebildet; die Diagonale ist die beiden gemeinsame Seite; überdieß ist jeder Winkel, den die Diagonale mit einer Seite bildet, dem gleich, den sie mit der parallelen Seite bildet 2c. In dieser Weise muß man die Schüler die Erscheinungen gehörig durchsprechen lassen, dann gewinnen sie leicht eine deutliche Einsicht in die schwierigsten Verhältnisse.

Gegenständen übergegangen, so wähle man zuletzt beliebige geometrische Gestalten, die sich in der Umgebung des Schülers seiner Beobachtung darbieten, und lasse sie geometrisch beschreiben (z. B. die verschiedenen Flächen, die die Oberfläche eines Hauses oder eines Thurmes ausmachen, die Gestalt eines Grundstücks ꝛc.)

Bei weiter fortschreitendem Unterrichte wird man zu verwickelteren Verhältnissen kommen, wo die gewöhnliche Sprache allein nicht mehr ausreicht; da ist es an der Zeit, auf die Zweckmäßigkeit und Nothwendigkeit der algebraischen Bezeichnung und der Formeln zu verweisen. Damit man jedoch hier nicht erst genöthigt werde, diese dem Schüler völlig neue Bezeichnungsart zu erklären und einzuüben, kann man ihn (wie es im Leitfaden angedeutet ist) schon früher damit vertraut machen. Es ist jedoch für den Anfang, damit der Schüler gewöhnt werde, mit dem Zeichen eine bestimmte Vorstellung zu verbinden, nothwendig, daß man einige Konsequenz in der Bezeichnung der Größen habe. So ist es z. B. sehr zu empfehlen, immer, wie weit auch der Unterricht sich ausdehne, die Seiten jedes Dreiecks vorzugsweise etwa mit **A, B, C** und ihre Gegenwinkel mit α, β, γ *) zu bezeichnen; wo möglich wähle man die Anfangsbuchstaben der entsprechenden Wörter, so daß **G** immer

*) Man scheue sich nicht, die drei griechischen Buchstaben zu gebrauchen, auch wo kein Griechisch getrieben wird. Da die Bezeichnung mehr für die Sprache als für die Schrift gilt, so ist es bequemer, alpha, beta, gamma zu sagen, als: Winkel **A**, Winkel **B**, Winkel **C**

die Grundseite, H die Höhe, F den Flächeninhalt bezeichnen u. s. w. Kommen Formeln vor, so müssen sie beständig in gewöhnliche Sprache übersetzt werden, damit nicht der Gedankeninhalt aus den Buchstaben schwinde; es ist nur dann möglich, es dem Anfänger zu lebendigem Bewußtsein zu bringen, daß die algebraischen Buchstaben nur Zeichen für mathematische Größen sind und daß die Gleichung, wie sie in jeder Formel enthalten ist, nur der mathematische Ausdruck für einen Satz, für eine Aussage ist. Auf diese Weise kann die elementare Geometrie eine zweckmäßige Vorbereitung und Einleitung für die Algebra abgeben; denn der Uebergang von der Raumgröße zur Zahlengröße ist sehr leicht zu vermitteln.

Die vorstehenden Bemerkungen, so fragmentarisch sie auch erscheinen, werden doch hinreichende Anhaltspunkte bieten, um dem Elementarunterrichte in der Geometrie eine andere und, wie wir glauben, ersprießlichere Gestalt zu geben. Auf dem hier angedeuteten Wege wird es nicht schwer fallen, der Wissenschaft Eingang in das Gemüth des Schülers zu verschaffen und zugleich dem Schulwissen einen leichten Uebergang in das Leben zu eröffnen, überhaupt aber die Forderungen zu befriedigen, welche Pädagogik und Wissenschaft der Methode stellen.

Der Leitfaden für den ersten Unterricht der Geometrie, der nach den hier entwickelten Grundsätzen bearbeitet ist, enthält einen Versuch, diesen Grundsätzen einen Weg in die Schule zu bahnen. Er

ist namentlich in der Absicht verfaßt, den Schüler zu einer möglichst vielseitigen Thätigkeit zu veranlassen. Daher enthält er nur die unentbehrlichen Hauptsätze der elementaren Geometrie, oft sogar ohne Erläuterung, immer ohne Figuren, und in der Regel auch ohne jene Masse von Zusätzen und untergeordneten Sätzen, die bei der alten Methode alle freie Bewegung hemmen. Natürlich wird dabei auch auf eine bedeutendere Thätigkeit des Lehrers gerechnet, der das alles nach Umständen ergänzen muß, was aus pädagogischen Gründen im Leitfaden nur kurz angedeutet werden konnte. — Die folgenden Erläuterungen geben darüber noch manchen Wink und werden hoffentlich manches Mißverständniß verhüten, zu dem die wortkarge Abfassung des Leitfadens leicht Anlaß geben könnte.

Erläuterungen

zum Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie.

Die Einleitung bedarf nach dem, was oben über das Wesen der Raumgrößen gesagt ist, keiner weiteren Erörterung. Es kommt beim Anfange des Unterrichts, da man es etwa mit 10—12jährigen Knaben zu thun hat, gar nicht auf eine philosophisch-haltbare Definition des Raumes und der Raumgrößen an, die für die Schüler doch noch lange leerer Schall bleiben würde. Man gehe auch nicht den gewöhnlichen Weg der Abstraktion, der ebenfalls für dieses Alter noch ganz unnatürlich ist. Wie sollte ein Knabe sich z. B. eine Bank ohne Farbe, ohne Gewicht rc. denken! Viel leichter wird es ihm, die geometrischen Gebilde, von denen zunächst die Rede ist, mit der Phantasie zu produziren. Man wird auch, wenn man vom Einfachsten ausgeht, die beiden Grundbegriffe, Gestalt und Größe, leicht anschaulich machen können. Jene wird bedingt durch die Art der erzeugenden Bewegung, diese durch ihre

größere oder geringere Ausdehnung*). Gerade Linien z. B. haben alle dieselbe Gestalt, aber verschiedene Größe; andererseits kann eine krumme Linie ebenso groß sein als eine gerade, aber sie hat eine andere Gestalt.

Zu der Vorstellung des Raumes gehört nothwendig die der Unendlichkeit, welche aber weder von der Phantasie noch vom Verstande in ihrer Totalität erfaßt wird. Man kann sich ihr nur näheren, indem man sich eine Bewegung ohne Aufhören vorstellt; und es ist gut, die beschränkte Phantasie der Knaben allmählig weiter und weiter zu treiben, damit sich ihr Gesichtskreis erweitert und damit sie die Vorstellung des Raumes von den sie umgebenden materiellen Dingen loslösen und als etwas Selbständiges ansehen lernen. Auf der anderen Seite ist schon hier auf eine bestimmte Auffassung des Punktes zu achten, und die gewöhnliche Meinung der Kinder zu beseitigen, der Punkt sei ein sehr (unendlich) kleiner Körper, oder Ebene u. dergl. Aus dieser Rücksicht ist besonders darauf hinzuweisen, daß die Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt ist. Ebenso verhält es sich mit der Linie in Bezug auf die Ebene und mit dieser in Bezug auf den Körper. Die Vorstellung der Bewegung wird alle diese Räthsel leicht lösen.

*) Das ist freilich, philosophisch genommen, gar nichts gesagt; aber Niemand wird die Begriffe der Quantität und Qualität auf der Schule philosophisch erörtern wollen.

Erstes Kapitel.

Entstehung der ebenen Raumgrößen.

1. Die gerade Linie gibt zwei total entgegengesetzte Richtungen an, und führt so zunächst auf den Begriff des Negativen. Hierbei ist wesentlich darauf zu sehen, daß die Ausdrücke positiv und negativ sogleich nur als Träger der Begriffe («in ursprünglicher Richtung, in entgegengesetzter Richtung») angeeignet werden. Der Gegensatz der zwei Bewegungen in derselben Linie ist leicht an konkreten Beispielen zu erörtern, die der Schüler selbst auffinden muß. (Vorwärts und rückwärts gehen, hinaufsteigen und hinabsteigen, Steigen und Fallen des Wassers &c.)

2. In der Wirklichkeit gibt es Bewegungen, die keinen Gegensatz haben (z. B. das Wachsen); andere, bei denen es nicht gleichgültig ist, welche man als die ursprüngliche zu betrachten und positiv zu nennen hat (z. B. beim Gehen ist die Bewegung vorwärts als positiv anzusehen, während das Hinauf und Hinunter für den Menschen gleichgültig ist). In der Geometrie aber sind alle Richtungen gleich berechtigt; jede ist an sich positiv, und jede auch, wenn sie als Gegensatz einer andern aufgefaßt wird, negativ.

Der Satz: Das Negative des Negativen ist positiv, klingt wunderbar; und doch sagt er ja nichts anders als: Das, was dem Negativen entgegengesetzt ist, ist positiv; z. B. Rückwärts ist das Negative des Vorwärts, dieses wiederum ist das Ne-

gative des Rückwärts, d. h. es ist das Negative des Negativen. Diese Betrachtung scheint hier freilich noch bedeutungslos, sie ist aber für die Folge wichtig (vergl. §. 12).

3. Es ist nur eine Modifikation der ursprünglichen Auffassung, wenn man sich denkt, die Linie sei gewissermaßen durch eine stoßweise fortschreitende Bewegung enstanden und bestehe also aus einer Wiederholung der als ursprüngliche Einheit angenommenen Linie. Hier ist der Unterschied der Einheit und Vielheit zu erläutern, der sich leichter anschauen als philosophisch definiren läßt. Es ist deutlich, daß die Attribute der Einheit und Vielheit nur Zuthaten des vorstellenden Geistes sind; denn jede Linie ist, für sich betrachtet, eine Einheit, und doch ist sie auch eine Vielheit, wenn man sich denkt, sie sei durch viele Theilbewegungen erzeugt. Man suche dies nur nicht auf zu abstrakte Weise zu erklären; am anschaulichsten wird man sein, wenn man eine Linie (z. B. die Breite der Schulstube) mit Schritten abgeht, oder an der Wandtafel eine gerade Linie mit absetzender Bewegung zieht.

Die Aufgaben sollen den Schüler mit dieser Vorstellung vertrauter machen; daher muß man zunächst die Zeichensprache vermeiden. Statt L nehme man Zoll, Fuß, Schritt; a bezeichnet den bewegten Punkt. Nimmt man etwa die Richtung nach rechts als positiv an, so muß man den Schüler zunächst so sprechen lassen: «Die Länge vom Anfangspunkte bis zum dritten Punkte rechts beträgt drei Zoll (Fuß, Schritt) und ist positiv; die Länge vom dritten Punkte rechts bis zum Anfangspunkt beträgt drei Zoll und ist negativ; die

Länge vom zweiten Punkte rechts bis zum vierten Punkte rechts beträgt zwei Zoll und ist positiv » u. s. w. Dann erst bediene man sich der Zeichen, wie sie im Leitfaden angegeben sind.

Bei der zweiten Aufgabe übe man besonders folgenden Satz: « ag ist aus ab entstanden, indem ab sechsmal genommen ist. » So führt man den Schüler zu der Grundvorstellung der Lehre von den Verhältnissen, daß man sich nämlich denkt, eine Linie sei aus der anderen dadurch entstanden, daß man die erzeugende Bewegung wiederholt, theilt u. s. w.

4. Der mathematische Begriff des Verhältnisses läßt sich nämlich darauf zurückführen, daß man betrachtet, wie eine Größe aus der anderen entstanden gedacht werden kann*); wobei natürlich die Art der Entstehung berücksichtigt werden muß. Man unterscheidet bekanntlich in der Arithmetik Additions- und Multiplikationsverhältnisse, je nachdem die eine Zahl aus der andern durch Addition einer Differenz oder Multiplikation mit einem Quotienten entstanden ist. Nur die letztere Art ist in der Arithmetik von einiger Bedeutung, und an sie schließt sich die Lehre von den Verhältnissen in der Geome-

*) Man verzeihe diesen schwerfälligen Ausdruck, der im Leitfaden absichtlich vermieden ist. Beim Unterricht muß allerdings darauf einiger Nachdruck gelegt werden, daß die Größen nicht immer wirklich so aus einander entstehen; sondern daß dies nur eine hypothetische Betrachtungsweise ist, die der Mensch erst hineinlegt. Allein bei Definitionen, die dem Schüler oft über die Zunge laufen müssen, hüte man sich vor solchen monströs gebildeten Wortfügungen, die dem Schüler nicht geläufig werden und überdies sein Sprachgefühl verletzen.

trie unmittelbar an*). — Die in der Aufgabe geforderte Uebung muß mündlich und schriftlich in der Weise, wie der §. 4 (S. 7 unten) angibt, gelöst werden.

Daß hier, wie im weiteren Verlaufe der Darstellung, im Leitfaden auf inkommensurabele Verhältnisse keine Rücksicht genommen ist, ist vorzüglich deswegen geschehen, weil Knaben von der hier vorausgesetzten Bildungsstufe den Begriff des Inkommensurabelen noch gar nicht zu fassen vermögen. Freilich kann die Wissenschaft diesen Gesichtspunkt nicht anerkennen; allein es läßt sich die Uebergehung dieses Verhältnisses auch wissenschaftlich rechtfertigen. So lange man freilich, wie hier auch noch geschehen ist, das Verhältniß geometrischer Größen auf die Analogie mit Zahlenverhältnissen zurückführt, tritt die Inkommensurabilität stets als nothwendige Folge des Unterschiedes kontinuirlicher und diskreter Größen hervor. Allein wenn man, wie oben angedeutet ist, den Begriff des Verhältnisses auf einen rein geometrischen Prozeß begründet, so kann man das Inkommensurable als eine nicht in der Geometrie selbst begründete Erscheinung so lange unbeachtet lassen, als man die arithmetische Betrachtung der Raumgrößen vermeidet; denn die Inkommensurabilität ist nichts als die Unmög-

*) Eine polemische Vertheidigung der hier gegebenen Definition des Begriffes Verhältniß gehört nicht hierher. Wenn man, wie gewöhnlich, dieses Wort gar nicht erläutert, sondern dies der Vernunft des Schülers überläßt, so läuft man, wie die Erfahrung lehrt, Gefahr, den Schüler lange Zeit über diesen wichtigen Punkt im Finstern herumtappen zu lassen. Uebrigens vergleiche, was oben über den Begriff des Verhältnisses gesagt ist.

lichkeit, gewisse geometrische Verhältnisse durch genaue Zahlen auszudrücken.

Es ist hier der Ort, den wirklichen und den verjüngten Maßstab zu erläutern, wie sie auf der dem Leitfaden beiliegenden Meßtafel enthalten sind. Die wissenschaftliche Konsequenz scheint freilich zu fordern, daß man damit warte, bis die Aehnlichkeit der Dreiecke behandelt sei, und der Schüler also die Konstruktion des Maßstabes wissenschaftlich verstehen könne. Allein wie oft ist der Erzieher genöthigt, von dem strengen Gange der Wissenschaft abzuweichen! Könnte man nicht ebenso fordern, der Schüler solle keine Uhr gebrauchen, ehe er ihre Konstruktion begriffen habe? Man wird entgegnen, der Gebrauch der Uhr sei keine wissenschaftliche Thätigkeit; allein auch die Meßtafel soll nur als ein praktisch nothwendiges Werkzeug zu genauem Zeichnen benutzt werden; auch wird man die Einrichtung derselben dem Schüler schon begreiflich machen können, und er wird leicht vermittelst der Anschauung einsehen, daß die von der ersten schrägen Linie abgeschnittenen Theile der Parallelen immer größer werden, und zwar im Verhältniß von 1, 2, 3, 2c., so daß der letzte Theil (der auf der einen Seite = 1‴, auf der andern = 0,1″ ist) zehnmal so groß als der erste, der erste also = 0,1‴ oder = 0,01″ ist u. s. w.

Was den verjüngten Maßstab betrifft, so ist die Grundvorstellung der Aehnlichkeit, worauf allerdings die Verjüngung beruht, dem Schüler schon durch Erfahrung geläufig, wenn er auch noch nicht zum Bewußtsein darüber gekommen ist. Verkleinerte Abbilder kennt er theils aus dem geographischen Unterricht, theils aus der Zeichenstunde, ja aus jedem Bilderbogen; und man

kann ihm leicht begreiflich machen, daß, wenn ein Abbild nicht verzerrt sein soll, ein durchgehendes Verjüngungsverhältniß angewandt werden muß. — Die Zeichnung verjüngter Maßstäbe, wie sie in der Aufgabe verlangt wird, fordert schon einige Fertigkeit im Zeichnen und besonders eine große Sorgfalt. Doch braucht der Schüler für die ersten beiden Maßstäbe ($\frac{1}{120}$ und $\frac{1}{1200}$) nur den auf der Meßtafel gegebenen Zollmaßstab zu kopiren und anders zu bezeichnen; um den dritten Maßstab zu zeichnen, muß man die Hauptabtheilungen 1,2″ (= 10000′) und die Unterabtheilungen 0,12″ (= 1000′) groß machen; die letzteren werden dann durch Parallelen und schräge Linien noch so getheilt, daß man 100′ genau angeben kann. — Es braucht kaum erinnert zu werden, daß man von Stunde zu Stunde nur Einen Maßstab darf zeichnen lassen und daß die vollständige Lösung dieser Aufgabe neben der Erläuterung der folgenden Paragraphen herlaufen kann. — Die Korrektur, die bei Arbeiten der Art durchaus nothwendig ist, mag Manchem sehr mühsam scheinen, allein man kann die Schüler recht wohl wechselseitig ihre Zeichnungen nachsehen lassen, wozu sie freilich alle ihr Reißzeug, oder wenigstens einen Zirkel mitbringen müssen.

5—9. Die verschiedenartigen Bewegungen eine geraden Linie müssen an möglichst vielen mannigfa tigen Beispielen erläutert werden; dabei muß beson ders der Unterschied der Richtung und der Lag anschaulich gemacht werden. Dann wird auch d Vorstellung des Winkels keine Schwierigkeit mache Die Definition ist absichtlich etwas abstrakt gefa weil es sonst sehr nahe liegt, daß Anfänger den Wi

kel und die den Winkel bildenden Linien verwechseln. Doch ist der Winkel, ebenso wie die Linie, eine Größe, und man wird wohl thuen, gerade die Analogie zwischen Winkel und Linie hervorzuheben; man könnte ja die Linie auch definiren als den Unterschied in der Lage zweier Punkte. Die wissenschaftliche Konsequenz fordert daher auch, da der Winkel durch drehende Bewegung erzeugt wird, den Gegensatz von positiven und negativen Winkeln, der im Leitfaden wohl deutlich genug entwickelt ist. Da jedoch die drehende Bewegung der Linie nicht so, wie die gerade Bewegung des Punktes nach beiden Seiten in die Unendlichkeit aus einander führt, so kommt es, daß jeder negative Winkel auch als positiver Winkel aufgefaßt werden kann, und z. B. $- 35^\circ = + 360 - 35^\circ = + 325^\circ$ ist, weshalb im weiteren Verlaufe der Geometrie die negativen Winkel wenig oder gar nicht vorkommen. Allein die Einführung der negativen Winkel ist in pädagogischer Beziehung nothwendig, um dem Schüler eine ganz allgemeine Anschauung vom Negativen zu geben. Denn jede Bewegung hat nothwendig einen Gegensatz, und da der Winkel nur durch Bewegung erzeugt werden kann, so muß man positive und negative Winkel unterscheiden.

10—12. Wie die Kreislinie und Kreisfläche das Resultat der drehenden Bewegung ist; so ergibt sich aus der parallelen Bewegung das Parallelogramm, und wenn die Richtung der Bewegung (d. h. der Leitlinie) mit der der bewegten Linie (der Grundlinie) rechtwinklig ist, das Rechteck. Da wir hier schon zu der eigentlichen Flächenbetrachtung kommen, und das Rechteck diejenige Fläche ist, in welcher die zwei Dimensionen in der größten Einfachheit (als Grund-

linie und Leitlinie) vorliegen; so scheint es zweckmäßig, zunächst vorzüglich das Rechteck zu betrachten, das, in größerm Maße als das schiefe Parallelogramm, als eine der geometrischen Grundformen angesehen werden muß.

Zunächst ergibt sich hier bei Beachtung des Gegensatzes von Positivem und Negativem eine große Schwierigkeit, wenigstens für die Anschauung. Nach arithmetischer Betrachtung nämlich muß ein Rechteck aus zwei negativen Linien positiv sein, während man nach einer oberflächlichen geometrischen Betrachtung eher behaupten möchte, ein solches Rechteck sei dem positiven noch viel mehr entgegengesetzt, als das, welches nur Eine negative Linie hat. Allein man bedenke, daß der Gegensatz des Positiven und Negativen nur ein einfacher Gegensatz der Richtung ist; da nun bei Entstehung des Rechtecks zwei Richtungen (Dimensionen) zusammen wirken, so kann man eigentlich nur solche Rechtecke vergleichen, die Eine Richtung gemein haben. Dann ist es aber deutlich, daß jedes Rechteck zwei Gegensätze hat, je nachdem man den Gegensatz der einen oder der andern Richtung auffaßt, und daß es noch ein viertes Rechteck geben muß, das wiederum den beiden negativen Rechtecken entgegengesetzt ist, und das man insofern als positiv betrachten muß. Freilich besteht auch zwischen dem Rechteck aus + + und dem aus — — noch ein Gegensatz; aber es ist ein anderer, als der durch die Ausdrücke positiv und negativ bezeichnet wird. Ihre Struktur, wenn man sich so ausdrücken darf, d. h. die Beziehung zwischen Grundlinie und Leitlinie, ist dieselbe; die beiden Linien sind gleichar-

tig. Die gleichartige Struktur tritt noch deutlicher zu Tage, wenn man den Winkel, den Grund- und Leitlinien machen, schief annimmt, so daß schiefe Parallelogramme entstehen, und dann entsprechende Diagonalen zieht, z. B. die Endpunkte der Grundlinie und der Leitlinie verbindet; die Parallelogramme aus + + und aus — — werden beide am Anfangspunkte jener Linien einen spitzen Winkel und eine kleine Diagonale haben, die Parallelogramme aus + — und aus — + dagegen einen stumpfen Winkel und eine größere Diagonale. — Vielleicht wird es nicht möglich sein, dem unfähigeren Schüler den schwierigen Satz schon hier ganz deutlich zu machen; allein in der Folge kann man noch öfter darauf zurückkommen. Namentlich gibt die Flächenberechnung, wie sie §. 59 erläutert wird, einen recht anschaulichen Beleg zu dem hier entwickelten Satze.

13. 14. Wie man, um eine Linie zu messen, untersuchen mußte, wie sie aus einer als Einheit angenommenen Linie entstanden gedacht werden könne, so muß man beim Rechteck untersuchen, wie es aus einem als Einheit angenommenen Rechteck *entstanden gedacht werden kann*, d. h. man muß sein *Verhältniß* zu der Rechteckseinheit angeben. Als Einheit nimmt man in der Regel das Quadrat an; man kann indeß jedes beliebige Rechteck als Einheit annehmen und untersuchen, wie ein anderes daraus entstanden gedacht werden kann, und dies führt zu den Sätzen in §. 14. Die *Aufgabe* in §. 13 muß der Schüler folgendermaßen lösen. Zunächst wird jedes Rechteck mit dem Quadratzoll verglichen, z. B. Nr. 2. «Ein Rechteck von 4″ Länge und 3″ Höhe

entsteht aus dem Quadratzoll, indem der Quadratzoll 4mal in die Länge, und dann diese 4 Quadratzoll 3mal in die Höhe genommen werden; es enthält also 4.3 = 12 Quadratzoll;» beim 4., 5. und 8. hat man darauf zu achten, daß die angegebenen Längen immer in Zoll verwandelt werden, weil der Quadratzoll als Einheit angenommen ist. Die Frage, wie sich die Rechtecke unter einander verhalten, muß einzeln beantwortet werden, und zwar nachdem erst untersucht ist, wie sie aus einander entstehen, z. B. «das 7. entsteht aus dem 2., indem das 2. erst $\frac{2,5}{4}$ oder $\frac{5}{8}$ mal in die Länge und dann diese $\frac{5}{8}$ noch $\frac{3,75}{3}$ oder $\frac{5}{4}$ mal in die Höhe genommen werden, so daß das 7. $\frac{2,5}{4} + \frac{3,75}{3} = \frac{25}{32}$ vom 2. ist.»

Der Schüler muß auf diese Weise erst eine lange Zeit anfangs mit leichteren, dann mit schwierigeren Zahlen geübt werden, so daß der 14. Paragraph, der nur die Resultate zusammenstellt, ihm faktisch geläufig ist, ehe er die Gesetze in dieser bestimmten Form sich einprägt. Ueberhaupt darf man sich hier so wenig als sonst mit den im Leitfaden enthaltenen Aufgaben begnügen; denn diese sollen nur dem Lehrer als Fingerzeig dienen, welche Uebungen er am besten vorzunehmen hat.

Die Frage am Schlusse der Aufgaben 6) soll nur einen Wink geben, daß bei der dritten Aufgabe Thür und Fenster als negative Rechtecke zu behandeln sind. Es wird dem Lehrer leicht sein, dies auf eine anschauliche Weise zu erläutern.

15. 16. Es ist, um der allgemeinen Größenlehre vorzuarbeiten, von großer Wichtigkeit, die Analogie zwischen geometrischen und arithmetischen Größen deutlich zu entwickeln und doch die beiden Gebiete nicht aus Bequemlichkeit zu verwirren und bald hier bald da eine Erklärung zu suchen. Namentlich ist es wichtig (beim zweiten Satze in §. 15 «Ein Rechteck aus zweigliedrigen u. s. w.» und bei §. 16) die negativen Rechtecke anzuschauen und nicht bloß zu berechnen. Der Ausdruck zweigliedrig ist statt zweitheilig gewählt worden, weil es dem Schüler schwer wird, wenn eine Linie aus einer größeren positiven und einer negativen besteht, z. B. $a = b - c$, die größere Linie b als einen Theil der kleineren a aufzufassen. Vielleicht wäre es indeß besser, diese Schwierigkeit zu überwinden und den wissenschaftlich richtigeren*) Ausdruck zweitheilig beizubehalten; nur darf der Schüler dann nie den bekannten Grundsatz der alten Methode hören, daß der Theil immer kleiner sei als das Ganze. — Wenn man anschaulich machen will, daß das Rechteck aus $(b-c)$ und $(d-e)$ aus vier Rechtecken besteht, so kann man sie entweder paarweise verknüpfen nach der Formel $b\,(d-e) - c\,(d-e)$, oder sie einzeln verbinden, aber dann in folgender Ordnung $bd - be + ce - cd$, deren Nothwendigkeit man leicht aus einer Figur erkennen wird.

Die Sätze über Bildung zusammengesetzter Quadrate müssen viel geübt und sehr fest eingeprägt wer-

---

*) Uebrigens ist es ja bekannt, daß man auch von Gliedern eines Verhältnisses, einer Reihe ꝛc. spricht, daß also dieser Ausdruck der Wissenschaft nicht fremd ist.

den, weil namentlich das Wurzelziehen darauf beruht, wovon nachher.

Der interessante Satz, daß die Quadratzahlen, Summen der ungeraden Zahlen sind, ist hier mit angeführt worden, theils weil er sich aus dem Vorhergehenden auf naturgemäße Weise entwickelt*), theils weil später (§. 44) eine wichtige Anwendung davon vorkommt. Die geometrische Figur, die diesen Satz noch deutlicher darstellt, als es mit Zahlen geschehen kann, muß man den Schüler selber zeichnen lassen; ja es ist besser, damit anzufangen, und erst nach der geometrischen Beobachtung die auffallendere arithmetische Erscheinung zu besprechen.

Der Satz am Schlusse des Paragraphen $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$ verdient auch eine gründliche Aufmerksamkeit und Einübung, da er später wieder bedeutende Anwendung findet, und sich ebenfalls leichter auf geometrischem als arithmetischem Wege einprägen läßt.

Es liegt nahe, schon hier das Wurzelziehen zu erklären und zu üben; die Nothwendigkeit Wurzeln zu ziehen tritt freilich erst viel später (§. 61) hervor; allein es ist mißlich, dort den Gang des Unterrichts durch eine ganz heterogene Betrachtung zu unterbrechen, während hier am Ende eines Abschnittes eine gute Gelegenheit dazu geboten ist, zumal da die für das Wurzelziehen nothwendigen Prämissen eben behandelt sind. Genau genommen, gehört freilich diese

*) Es ist mir unbekannt, ob diese Ableitung, so einfach und naturgemäß sie auch ist, sonst schon gegeben worden ist. Ohne sie behält der Satz immer etwas Räthselhaftes.

Operation nicht in den geometrischen Unterricht; allein beim praktischen Rechenunterricht findet sie schwerlich eine gehörige Stelle, und eine wissenschaftliche Darstellung der Rechenoperationen, die dann auch das Wurzelziehen umfaßt, kann erst im Zusammenhange des arithmetischen Unterrichts gegeben werden, der aber erst nach einer tüchtigen geometrischen Vorbildung begonnen werden darf*).

17. Wenn früher der Winkel als Resultat der Drehung Einer Linie erschien, so tritt er jetzt als

---

*) Vielleicht ist eine methodische Bemerkung über das Wurzelziehen hier an der rechten Stelle. Wenn man die Schüler geübt hat, aus den Quadraten zweizifferiger Zahlen die Wurzel zu ziehen, so macht bekanntlich der weitere Fortschritt große Schwierigkeiten, da es dem Schüler schwer fällt, znsammengesetzte Formeln, wie $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$ zu überschauen und anzuwenden. Man übe daher nach den §. 16 angegebenen Sätzen folgende Sätze: Das Quadrat einer aus Zehnern und Einern bestehenden Zahl besteht aus dem Quadrat der Zehner, dem doppelten Produkt der Zehner und Einer, und dem Quadrat der Einer. Die Quadrate der Zehner sind Zehnmalzehner oder Hunderte. Es fragt sich also, wie viel Hunderte die gegebene Zahl hat. Zieht man aus der Anzahl der Hunderte die Wurzel, so findet man die Anzahl der Zehner. Diese Anzahl der Zehner ergibt sich bei kleinen Zahlen (z. B. 2809) von selbst (denn in 28 Hunderten ist das Quadrat von 5 Zehnern enthalten): bei größeren Zahlen, z. B. 583696 ist es schwieriger; diese Zahl hat 5836 Hunderte, und um zu wissen, wie viel Zehner die Wurzel haben müsse, ist zuvor aus 5836 die Wurzel zu ziehen, welches in der bereits eingeübten Weise geschieht. So erscheint die in der gewöhnlichen Darstellung erste Operation hier vielmehr als eine Hülfsrechnung. Die ganze Rechnung ist daher anfangs so anzustellen:

das Richtungsverhältniß zweier Linien auf. Beide Vorstellungen werden durch die Thätigkeit der Phantasie leicht vermittelt; doch ist es namentlich für den rechten Winkel wichtig, daß man die Einheit der beiden Definitionen, die hier und §. 7 gegeben werden, bespreche. Der rechte Winkel ist seinem Nebenwinkel gleich, weil er durch eine Vierteldrehung entstanden ist; und weil er seinem Nebenwinkel gleich ist, beträgt die Drehung gerade die Hälfte der halben Umdrehung. Die hier gegebene Definition ist darum von besonderer Wichtigkeit, weil man, um zu beweisen, daß ein Winkel ein rechter sei, nachweisen muß, daß er seinem Nebenwinkel gleich ist.

```
      √58|36 = 76          √5836|96 = 764
       49|                  5776|
     ---------            ------------
     14|93                152|609
       |84                   |608
     ---------            ------------
        96                     16
        36                     16
     ---------            ------------
Rest:   60
```

Auf diese Weise wird die verwickelte Operation auf mehrere einfache zurück geführt, indem die Zweitheiligkeit der Wurzel und die darauf beruhende Dreitheiligkeit des Quadrates durchweg festgehalten wird. Nach demselben Schema läßt sich auch das Wurzelziehen aus Brüchen und gemischten Zahlen sehr leicht darstellen; jedoch muß man vorher folgende Anwendungen des Hauptlehrsatzes einüben: Wenn eine Zahl aus Ganzen und einem Bruch besteht, so besteht ihr Quadrat aus dem Quadrat der Ganzen, dem doppelten Produkt der Ganzen und des Bruches, und dem Quadrat des Bruches. Ferner: Wenn eine Zahl aus Zehnteln und Hunderteln besteht, so besteht ihr Quadrat aus dem Quadrat der Zehntel (welches Hundertel gibt), dem doppelten Produkt der Zehntel und Hundertel und dem Quadrat der Hundertel u. s. w.

Um den Begriff des Perpendikels fest einzuprägen, muß man wiederholt auf schrägen Linien Perpendikel errichten lassen, und dabei besonders die Anmerkung gehörig erläutern.

18. Wer in den Ansichten und der Auffassungsweise der alten Methode befangen ist, der wird sicherlich an dem Satze Anstoß nehmen, daß parallele Linien nach einem unendlich entfernten Punkte gerichtet seien; und allerdings liegt darin, wie überhaupt in der Vorstellung der Unendlichkeit, eine Art Widerspruch, den weder der Verstand, noch die Phantasie ganz auflöst. Denkt man sich die Linien von vorn herein als parallel, so wird jedes Konvergiren ausgeschlossen, und es ist unmöglich, daß sie nach Einem Punkte gerichtet seien. Denkt man sich aber den allmähligen Uebergang aus der nicht parallelen in die parallele Lage, und verfolgt man dabei den Durchschnittspunkt, so ist es deutlich, daß dieser bei einer kontinuirlichen Drehung nie ganz verschwinden kann, sondern nur in unendliche Fernen hinausrückt. Nun ist es freilich ein Widerspruch, einen unendlich entfernten Punkt anzunehmen; denn sobald ich ihn mit der Phantasie fixire, hört ja die Unendlichkeit auf. Aber wie gesagt, bei allem Unendlichen verläßt uns die deutliche Anschauung; oder kann man sich etwa eine unendlich kleine Größe vorstellen? und dennoch gerirt der Mathematiker fortwährend mit dem unendlich kleinen, wie mit dem unendlich großen. So wird man sich auch mit dem unendlich entfernten Punkte aussöhnen müssen, nach welchem parallele Linien gerichtet sind.

Aber — wird man fragen — wozu diese unver-

ständliche Vorstellung der Parallelen? Was soll sie namentlich in einem Elementarbuche? — Die wissenschaftliche Bedeutung der Vorstellung von dem unendlich entfernten Punkte wird Denen nicht unbekannt sein, die mit Steiner's bedeutenden Forschungen bekannt sind; sie beruht namentlich darauf, daß in allen geometrischen Verhältnissen und Gesetzen eine Einheit hergestellt wird, statt daß sonst alle Betrachtungen, alle Schlüsse, alle Beweise zwiefacher Art sind, je nachdem die betrachteten Linien parallel sind oder nicht. In der höheren Mathematik hat die systematische Betrachtungsweise schon längst den unendlich entfernten Punkt gerechtfertigt, z. B. in der Lehre von den Kegelschnitten, wo die Parabel nur als eine Ellipse mit einem unendlich entfernten Brennpunkte erscheint. Von großer Bedeutung ist diese Behandlungsweise auch in der Stereometrie, wie bei einer andern Gelegenheit gezeigt werden soll. — Statt der wissenschaftlichen Rechtfertigung, die hier zu weit führen würde, möge nur noch ein Fall angedeutet werden, der die Fruchtbarkeit dieser Vorstellung in ein deutliches Licht stellt. Das perspektivische Zeichnen beruht bekanntlich darauf, daß die Projektionen der zu zeichnenden Gegenstände auf einer zwischen dem Auge und dem Gegenstande gedachten Ebene dargestellt werden. Denkt man sich nun eine Linie von dem Auge nach einem beliebigen unendlichen Punkte, so ist der Punkt, wo diese Linie die Zeichenebene schneidet, die Projektion jenes unendlichen Punktes, und die Projektionen aller Linien, die in der Wirklichkeit in der Richtung nach jenem unendlichen Punkte parallel fortlaufen, müssen also auf der Zeichen-

ebene in der Projektion des unendlichen Punktes zusammenlaufen. Auf diesem Satze beruht bekanntlich die ganze Perspektive, und sie läßt sich auf höchst einfache Weise daraus entwickeln.

In der ebenen Geometrie, soweit der Leitfaden sie darstellt, ist freilich wenig Anlaß, die Vorstellung von dem unendlich entfernten Punkte weiter zu verfolgen; aber die Konsequenz fordert sie, sobald man die Raumformen nicht in starrer Ruhe auffaßt und zergliedert, sondern die Erscheinungen verfolgt, die sich aus der Bewegung entwickeln lassen. Und wenn eine Idee im weiteren Verlaufe der Wissenschaft eine so bedeutende Rolle spielt, so muß sie nothwendig in den Elementen angedeutet werden, um so mehr, da sie wesentlich beiträgt, den Gesichtskreis zu erweitern, und den Geist von der Beschränktheit zu befreien, die nur begreift, was sich mit Händen greifen läßt. Das Wunderbare, das in der Wissenschaft liegt, sollte man nicht ängstlich verhüllen; und wenn der menschliche Geist das Räthsel auch nie lösen kann, so soll er es doch nicht verkennen oder gar leugnen, sondern indem er nach klarer Einsicht ringt, seine Kräfte üben und zugleich seine Schwäche erkennen.

Um den Kontrast in vollem Maße darzustellen, folgt sogleich der Satz, daß Parallelen überall gleich weit von einander entfernt sind. Man wird vielleicht einen Beweis vermissen, der in sonst gewöhnlicher Form hier noch gar nicht gegeben werden kann. Allein dieser Satz ist eine Forderung der apriorischen Anschauung; er ergibt sich zugleich auf konsequente Weise aus der im §. 10 gegebenen Definition der Parallelen, die durch die hier gegebene Entwickelung

keineswegs aufgehoben wird. Denn was hier Entfernung genannt wird, das ist der Weg, den jeder Punkt der einen Linie beschreiben müßte, wenn sie durch parallele Bewegung in die Lage der anderen versetzt würde.

Daß der Winkel am Durchschnittspunkte zweier sich gleichmäßig (d. h. um gleichviel Grade) nach derselben Seite drehenden Linien sich nicht ändern kann, folgt aus der Definition des Winkels; denn da die Linien ihre Richtung gleichmäßig ändern, so muß der Richtungsunterschied derselbe bleiben. Bei sorgfältiger Lösung der Aufgabe wird der Schüler entdecken, daß der Ort des Durchschnittspunktes ein Kreis ist; so wird er auf den wichtigen Satz von den Peripheriewinkeln vorbereitet, der jedoch damit noch nicht bewiesen ist, von dem auch hier noch nicht die Rede sein kann. Geübteren Schülern mag man die Frage vorlegen, wie sich die Sache verhält, wenn die Drehung nach entgegengesetzten Seiten vorgenommen wird, so daß die Differenz der inneren Winkel konstant bleibt. Wenn man die festen Drehungspunkte anfangs gleich weit vom Durchschnittspunkte annimmt, so ist der Ort des Durchschnittspunktes bekanntlich eine gerade Linie; sonst aber ergibt sich eine gleichseitige Hyperbel, die durch die beiden festen Punkte geht, deren Mittelpunkt in der Mitte zwischen diesen Punkten liegt und deren Asymptoten gegen die Verbindungslinie der festen Punkte eine Neigung von $\frac{1}{2}\delta$ (konstante Winkeldifferenz) und $90 - \frac{1}{2}\delta$ Graden haben.

19—21. Der berühmte Lehrsatz von den Parallelen, den auf Euklidische Art zu beweisen, sich die

Mathematiker so unendliche Mühe gegeben haben, ist hier, wie man sieht, sehr kurz dargestellt. Hält man nämlich die beiden Definitionen zusammen, daß Parallelen dieselbe Richtung haben, und daß ein Winkel der Richtungsunterschied zweier Linien ist, so ergibt sich der Satz von selbst; denn da die schneidende Linie auch eine konstante Richtung hat, so muß der Unterschied zwischen ihrer Richtung und der der Parallelen, den man an beiden Durchschnittspunkten beobachtet, derselbe sein. Die innere Nothwendigkeit dieses Satzes wird noch deutlicher, wenn man beide Parallelen gleichmäßig nach derselben Seite dreht, bis sie mit der schneidenden Linie zusammenfallen. Der zweite und dritte Theil des Satzes §. 20 ist an die Anmerkung §. 19 anzuknüpfen. — Die Umkehrung des Satzes: (Wenn die Winkel gleich sind, so sind die Linien parallel) ist hier*) nicht mit angegeben, weil es eine vortreffliche Denk- und Sprechübung ist, wenn der Schüler den Satz selber umkehren muß, wozu man ihn natürlich anzuhalten hat.

Die Ausdrücke: entsprechende Winkel, Wechselwinkel, Gegenwinkel, müssen dem Schüler in ihrer vollen Bedeutung klar und geläufig sein. Zu dem Ende ist es zweckmäßig (anfangs mit, dann ohne Figur), folgende Sätze zu üben: «Wenn ein Winkel rechts von der schneidenden Linie und über der einen Parallele liegt, so liegt der ihm entsprechende

*) Auch an anderen Stellen ist die Umkehrung der Lehrsätze absichtlich nicht in den Leitfaden aufgenommen; es ist Aufgabe des mündlichen Unterrichts, diese Umkehrung zu erläutern, oder vielmehr den Schüler selbst auffinden zu lassen.

Winkel rechts von der schneidenden und über der andern Parallele, sein Wechselwinkel aber liegt links von der schneidenden und unter der anderen Parallele » ꝛc.

22—24. Unter dem Worte Figur versteht man entweder einen begrenzten Theil einer Ebene — oder eine Einheit, eine Verknüpfung gewisser Punkte oder Linien. Die alte Methode hat sich mehr nur an die erstere Vorstellung gehalten, obgleich bei den wenigsten Sätzen der begrenzte Theil der Ebene als solcher in Betracht kommt. Zu einer vollständigen Betrachtung der Raumgebilde aber gehört wesentlich auch eine Untersuchung über die Verhältnisse, die bei der Kombination von Linien und Punkten überhaupt stattfinden. Jedoch konnte nur das nothwendigste hierher Gehörige in den Leitfaden aufgenommen werden, da eine umfassende Behandlung der sogenannten vollständigen Figuren hier noch nicht möglich ist.

25. Die Grundvorstellung von der Bildung der Figuren durch Stralen ist an sich so einleuchtend, daß sie keiner Erläuterung bedarf. Es ist oben schon darauf hingewiesen worden, daß die Erzeugung von Figuren aus Stralengebilden, wenn auch nicht immer die reale Entstehung, doch die in der Phantasie liegende Genesis der meisten zusammengesetzten Gebilde ist. Steiner hat die Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander lediglich auf die Betrachtung der sie erzeugenden Stralensysteme gegründet, und wie die Wissenschaft durch diese Darstellung außerordentlich bereichert ist, so muß ihm auch die Schule dafür Dank wissen, daß er dadurch eine wahr-

haft genetische lebendige Behandlung der Elemente möglich gemacht hat.

Zweites Kapitel.

Bestimmung eines Ortes in der Ebene.

Die Einführung der im zweiten Kapitel enthaltenen Betrachtungen in die Elemente der Geometrie wird wol keiner Rechtfertigung bedürfen. Es ist eine der wesentlichsten Aufgaben der Geometrie, den noch unbekannten Ort gewisser Punkte durch ihre Beziehungen zu bekannten Punkten zu bestimmen; darauf kann man die einfachsten Aufgaben der elementaren Geometrie, wie die verwickelten Probleme der Analysis zurück führen. Namentlich aber ist es in pädagogischer Beziehung wichtig, daß man dem Schüler auf diesem Wege sogleich einen theoretischen Zweck und unzählige praktische Anwendungen geometrischer Betrachtungen vorführen kann. Wer aber auch damit einverstanden ist, der wird doch wahrscheinlich Anstoß daran nehmen, daß die Kongruenz der Dreiecke, diese Hauptwaffe der Geometrie, nicht erst erläutert worden ist. Allein die folgende Darstellung wird zeigen, daß die große Bedeutung des Dreiecks sich erst aus den Sätzen über Ortsbestimmung ergibt. Das Dreieck ist gewissermaßen die Brücke vom Bekannten zum Unbekannten; das Dreieck spielt in der Geometrie eine ähnliche Rolle, wie die Gleichung in der Arithmetik.

Da aber die Lehre vom Dreieck immer voraussetzt, daß Einiges bekannt, Anderes unbekannt sei, so ist es nothwendig, den Schüler erst mit den wesentlichen Aufgaben bekannt zu machen; er muß sich gewissermaßen erst für das Unbekannte interessiren und überhaupt erst damit vertraut werden, wie es denn kommen könne, daß man z. B. an einem Dreiecke nur zwei Seiten und einen Winkel kennt, und die übrigen Stücke nicht. Ferner kann man sich nicht verhehlen, daß die Darstellung der Lehre von der Kongruenz nach der alten Methode immer den Charakter der Zufälligkeit hat. Denn nur durch ein äußerliches Probiren entdeckt man, daß *drei* Stücke zur Bestimmung eines Dreiecks nothwendig und genügend sind. Nun kombinirt man die sechs Stücke des Dreiecks je drei und drei, und findet so, nach Beseitigung des untauglichen Falles, wenn drei Winkel gegeben sind, jene vier bekannten Sätze — oder was noch gewöhnlicher ist, man gibt gar keine Ableitung dieser Sätze, sondern läßt sie ohne Zusammenhang und ohne innere Begründung äußerlich beweisen und einlernen. — Will man aber dem Schüler eine Einsicht in die Natur und Bedeutung des Dreiecks geben, so muß man zuvor die hier gegebene Lehre von der Ortsbestimmung erläutern, woraus sich denn die Lehre vom Dreieck aufs Einfachste entwickelt.

28. Der Uebergang vom Bekannten (einer als Richtlinie angenommenen geraden Linie und eines als Richtpunkt angenommenen Punkt derselben) zu dem zu bestimmenden Punkte wird durch Bewegung vermittelt, und zwar entweder durch drehende Bewegung der Richtlinie, die in jeder anderen Lage a

Stral erscheint, oder durch parallele Bewegung eines Perpendikels, dem die Richtlinie als Leitlinie dient. Es ist deutlich, daß jede dieser Bewegungen, vollständig ausgeführt, jeden Punkt in der Ebene einmal erreichen muß, und daß dann seine Lage durch zwei Größen bestimmt wird; im ersteren Falle durch die Länge des Strals zwischen dem Richtpunkte und dem gesuchten Punkt und durch den Stralenwinkel, im letzteren Falle durch Ordinate und Abszisse, oder, wie ich aus pädagogischen Gründen es verdeutscht habe, durch Höhe und Abschnitt. So ergeben sich auf nothwendige Weise diese vier Bestimmungsgrößen, die man auch beim Unterricht paarweise auseinander halten möge.

29. Wenn man Eine Bestimmungsgröße für sich betrachtet, so gewinnt man die Vorstellung einer Ortslinie; d. h. die noch unbekannte Lage des Punktes wird auf eine Linie beschränkt, in welcher der Punkt liegen muß. Hieraus ergibt sich zugleich, daß zwei Angaben, und zwar in irgend einer Verknüpfung jener vier Bestimmungsgrößen, die Lage des Punktes hinreichend bestimmen. — Der Begriff einer Ortslinie ist für die Geometrie von der größten Bedeutung, und es ist kaum zu begreifen, warum man ihn bisher in Schulbüchern so vernachlässigt hat. Nicht allein muß darauf die Darstellung der Auflösung geometrischer Aufgaben gegründet werden, wenn man den Schüler nicht beständig will im Dunkeln herumtappen lassen; sondern auch in der höheren Geometrie, z. B. in der Lehre von den Kegelschnitten, spielt der Begriff der Ortslinie eine bedeutende Rolle; und es ist daher durchaus nothwendig, ihm schon in den

Elementen eine besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Man muß daher die vier Sätze im §. 29 in jeder Weise gehörig durcharbeiten, um den Schüler zu einer deutlichen Einsicht in das Wesen der Ortslinie zu bringen.

30. Ferner tritt nun hier in den einfachsten Verhältnissen einer der wichtigsten Begriffe auf, der jeden weiteren Fortschritt in der Geometrie bedingt, nämlich die gegenseitige Abhängigkeit, woraus sich später auf einfachste Weise der Begriff der Funktion entwickelt. Die Vorstellung der Abhängigkeit läßt sich leicht an mannigfaltige Erscheinungen anknüpfen, die im Gesichtskreise des Schülers liegen; und man scheue sich nicht, selbst das Alltägliche zu besprechen, um den kausalen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung recht klar darzustellen. Gegenseitige Abhängigkeit ist im Bereiche der Natur und des Lebens nicht gewöhnlich, und sie kann auch nur da stattfinden, wo beide Faktoren eines Verhältnisses als zusammenhängende Wirkungen einer höher stehenden Ursache erscheinen, wie auch hier jene vier Bestimmungsgrößen sämmtlich von der Lage des bestimmten Punktes abhängen. Erst wenn man den Punkt ignorirt, tritt die gegenseitige Abhängigkeit der vier Größen hervor; doch muß man, wenigstens in der Zeichnung, immer erst aus zwei Angaben den Punkt konstruiren, ehe man die beiden anderen Größen bestimmen kann.

31. Die hier nur kurz angedeutete praktische Anwendung des Vorhergehenden muß möglichst ausgebeutet werden, um das theoretisch Erläuterte den

Schüler recht zum Bewußtsein zu bringen. Dabei ist es wesentlich, daß der Uebergang der Vorstellung aus der Geometrie in die Wirklichkeit und aus der Wirklichkeit in die Geometrie dem Schüler recht geläufig werde. So z. B. muß der Schüler bei der ersten Aufgabe erklären, daß die Spitze des Thurmes der Punkt ist, von dessen Bestimmungsgrößen es sich handelt; der Lichtstral, der vom Thurme nach dem Auge geht, entspricht dem geometrischen Stral; die Linie zwischen dem Standpunkt und Thurme ist die Richtlinie, die Entfernung (250′) ist der Abschnitt; die gesuchte Höhe des Thurmes ist die Höhe (Ordinate) des Punktes u. s. w. Ist der Lehrer im Besitz eines Winkel messenden Instrumentes, so darf er nicht versäumen, mit dem Schüler Höhen u. dergl. in der Umgegend zu messen. Dabei wird er sehr häufig in die Verlegenheit kommen, daß er eine oder die andere Linie wegen äußerer Hindernisse nicht wirklich messen kann; und diese Schwierigkeit bildet den besten Uebergang zum folgenden Paragraphen, der sogleich aus der Noth hilft.

32. Wenn man nämlich zwei bekannte Punkte als Richtpunkte annimmt, so kann man jeden dritten Punkt durch seine Beziehungen zu jenen zwei Punkten bestimmen. Die drei Punkte bilden ein Dreieck, und so werden wir hier darauf hingewiesen, die Natur des Dreiecks und die gegenseitige Abhängigkeit seiner Elemente zu untersuchen, wie im dritten Kapitel geschieht.

Es ist hier nur zu bemerken, daß absichtlich nur die drei Kombinationen aufgezählt sind, die zu den

früheren neu hinzutreten. Der Lehrer muß hier wie derholend alle Fälle zusammenfassen, die zur Bestim mung der Lage eines Punktes genügen oder nicht ge nügen, wobei einleuchtend ist, daß, wenn zwei Stra lenpunkte angenommen werden, doch nur von Eine Höhe und auch nur von einem Abschnitte die Red sein kann; denn der andere Abschnitt ist vom erste abhängig und kann daher nicht als zweite Ortsbe stimmung gelten.

33, 34. Niemand wird leugnen, daß der Begrif der Symmetrie für geometrische Betrachtunge durchaus unentbehrlich ist; in der Regel erläutert ma ihn erst da, wo er sich gar nicht mehr zurückweise läßt, nämlich in der Stereometrie. Da er aber dor ganz ohne Vorbereitung und ohne weitere Anhalts punkte erscheint, so wird es der ungeübten Anschauun in der Regel schwer, ihn sich ganz anzueignen. I der Planimetrie sind die Erscheinungen der Symme trie so einfach und doch so fruchtbar, daß sie wo eine genauere Beachtung verdienen. §. 33 enthäl die Erklärung der Symmetrie und einige Grundsätz die für die Anschauung eine apriorische Nothwendig keit haben und sich überdies aus §. 30 ableiten la sen. Die Sätze in §. 34 bedürfen vielleicht noch eine besonderen Erläuterung. Da symmetrische Punkt immer gleiche Höhe und denselben Abschnitt haben so müssen auch Stralen nach demselben Straler punkte (in der Richtlinie) und die Winkel, welche di Stralen mit der Richtlinie bilden, immer glei sein. Die zwei letzten Sätze sind nur Umkehrunge der im Vorigen enthaltenen Vorstellungen. Den

da für eine bestimmte Richtlinie jeder Punkt nur Einen symmetrischen Gegenpunkt haben kann, und jede Linie nur Eine symmetrische Gegenlinie, da ferner in symmetrischen Linien jeder Punkt der einen seinen symmetrischen Gegenpunkt in der andern haben muß, so müssen auch umgekehrt die Verbindungslinien symmetrischer Punkte symmetrische Linien sein. Ebenso verhält es sich damit, daß die Durchschnittspunkte symmetrischer Linien auch symmetrisch sein müssen.

Die Aufgaben sind sowol durch Zeichnung zu lösen, als auch mündlich; und es wird zweckmäßig sein, sie zunächst mündlich zu behandeln und zwar wo möglich ohne Figur. Die Lösung der ersten Aufgabe vermittelst des rechten Winkels beruht darauf, daß symmetrische Punkte gleiche, aber entgegengesetzte Höhe haben. Die zweite Lösung beruht darauf, daß nach §. 33 der gesuchte symmetrische Gegenpunkt von jedem Punkte der Richtlinie ebensoweit entfernt ist, als der gegebene Punkt; er liegt also im Durchschnitt beliebiger Ortskreise 2c. Bei der zweiten Aufgabe muß man durch Ortskreise zwei Punkte bestimmen, die von den gegebenen gleichweit entfernt sind. Bei der dritten bestimmt man erst auf den gegebenen Stralen zwei symmetrische Punkte (gleichweit vom Durchschnitt der Stralen, welcher natürlich in der Richtlinie liegt), dann sucht man einen Punkt, der von diesen beiden symmetrischen Punkten gleichweit entfernt ist, und also auch in der gesuchten Richtlinie liegen muß.

Bei den folgenden Aufgaben kommt es wesentlich darauf an, daß man ihren Zusammenhang mit der

Lehre von der Symmetrie in folgender Weise darstellen lasse: 4) Die Winkel halbirende Linie ist die symmetrische Richtlinie für die beiden Schenkel. 5) Das Perpendikel ist die symmetrische Richtlinie für die beiden von dem Punkte auslaufenden Hälften der gegebenen Linie. 6) Die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit seinem erst zu konstruirenden symmetrischen Gegenpunkt ist das gesuchte Perpendikel. 7) und 9) Die symmetrische Richtlinie ist die gesuchte Ortslinie. 8) und 10) der Durchschnittspunkt der symmetrischen Richtlinie ist der gesuchte Ort. 11) Der Punkt liegt da, wo die symmetrische Richtlinie der gegebenen Punkte die gegebene Linie schneidet.

Die Anwendung auf die Lehre von der Spiegelung bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Drittes Kapitel.

Vom Dreieck.

35. Nach dem Vorhergehenden wird es dem Schüler deutlich sein, warum die Lehre vom Dreieck von so überwiegender Bedeutung für die ganze Geometrie ist. Der Uebergang von der Lehre über die Ortsbestimmung zu der vom Dreieck muß jedoch nicht bloß äußerlich genommen, sondern in seiner ganzen Bedeutung erfaßt werden. Der Schüler muß sich gewöhnen, die Erscheinungen am Dreieck auf die vor

her erläuterten Sätze zurückzuführen. So erst wird er begreifen, warum man stets eine Seite des Dreiecks als Grundseite von den anderen unterscheidet; will er eine Höhe ziehen, so muß er erst den symmetrischen Gegenpunkt der Spitze aufsuchen und dann diese beiden Punkte verbinden u. s. w.

Die Aufgaben können mündlich oder schriftlich gelöst werden. Bei der ersten ist namentlich der Begriff des Negativen wieder aufzufrischen. Daß die Winkel des Dreiecks zusammen zwei Rechte betragen, ist schon früher dagewesen. Daß zwei Seiten stets größer sein müssen, als die dritte, wird der Schüler leicht finden.

36. Die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel ist von der größten Bedeutung und muß nach Anleitung des Leitfadens gehörig erläutert werden, weil darauf die Lehre von der Kongruenz und von der Aehnlichkeit beruht. Die Gegenseitigkeit spricht sich darin aus, daß man die Sätze umkehren kann; doch müssen die umgekehrten Sätze ebenso wie die ursprünglichen aus den Sätzen über Ortsbestimmung ꝛc. selbständig entwickelt werden. Dann hat man auf die ungleiche Zunahme des Winkels und der Gegenseiten ein besonderes Gewicht zu legen.

37. Man wird vielleicht hier, wie an anderen Stellen des Leitfadens, die mathematische Strenge vermissen; allein dies ist nur ein scheinbarer Mangel. Der Satz: gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen, läßt sich namentlich in der Mathematik mit aller Strenge verfolgen, und gibt zugleich eine wirkliche Einsicht in das Wesen der Dinge, die durch gewöhn-

liche Beweise nach der alten Methode nicht gewonnen werden kann.

Hat man nun erkannt, daß die Verhältnisse der Seiten ausschließlich von den Winkeln abhängen und sich ändern, sobald die Winkel sich ändern, so muß man weiter schließen, daß bei gleichen Winkeln auch die Verhältnisse gleich sein müssen. Ebenso verhält es sich mit dem umgekehrten Satze. Man könnte höchstens einwenden, daß die Art des Verhältnisses nicht deutlich sei, daß es nicht offenbar sei, ob das von den Winkeln abhängende Verhältniß der Seiten ein geometrisches oder ein arithmetisches sei; es ließe sich ja denken, daß die Zunahme einer Seite, oder ihre Entstehung aus der Grundseite nicht durch Multiplikation, sondern durch Addition bestimmt würde. Allein es läßt sich leicht zeigen — und muß auch beim Unterricht gezeigt werden, daß die Zunahme nicht additiv, sondern multiplikativ ist, daß z. B. bei einer gewissen Winkelzunahme die Gegenseite halb, oder doppelt, oder gerade so groß ist als die Grundseite, man mag diese selbst so groß annehmen, als man will.

Die Aufgaben schließen sich eigentlich an §. 36 an, sind jedoch an den Schluß des Abschnittes gestellt worden, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen. Beim Unterricht mögen sie, wenn es besser paßt, vor §. 37 besprochen werden. Der Satz, daß jeder Winkel im Halbkreis ein rechter ist, wird gewöhnlich in Verbindung mit den Sätzen über die Peripheriewinkel vorgetragen. Da er aber bei solcher Darstellung erst sehr spät (§. 54) vorkommen würde, und man ihn doch zur Lösung gewisser Zei-

chenaufgaben nicht entbehren kann, so schien es zweckmäßig, ihn schon hier zu behandeln. Er enthält offenbar nur eine Umkehrung des Satzes, daß die Mitte der Hypotenuse von den drei Ecken gleichweit entfernt ist, muß aber selbständig bewiesen werden. Wenn man nämlich den Radius des Scheitelpunktes zieht, so entstehen, da die drei Radien gleich sind, zwei gleichschenklige Dreiecke; die zwei Paare gleicher Winkel sind zusammen zwei rechten gleich, also sind die zwei Winkel, welche zusammen den Winkel im Halbkreis bilden, gleich einem rechten.

Es bedarf wol keiner Erklärung, daß Beweise der Art nicht gegen die in diesem Buche geforderte Methode verstoßen.

38. Es ist deutlich, wie der Inhalt dieses Paragraphen aus dem Vorhergehenden abzuleiten ist. Für geübtere Schüler wird es nicht zu schwer sein, zu den vier angegebenen Kombinationen von Bestimmungsstücken auch noch die fehlenden zu ergänzen, welche sich ergeben, wenn man die Höhen und die Abschnitte der Seiten mit berücksichtigt. Wenn man z. B. die Höhen mit betrachtet, so sind noch folgende Fälle möglich: A, B und Ha (oder Hb); A, B und Hc; A, Ha und Hb (oder Hc); A, Hb und Hc; Ha, Hb und Hc. Die Zeichnung eines Dreiecks aus den drei Höhen läßt sich nach dem bis jetzt Vorgetragenen freilich noch nicht vollziehen. So bieten auch einige der Fälle, wo die Abschnitte der Seiten gegeben sind, dem Schüler unüberwindliche Schwierigkeiten dar. Dennoch ist es gut, jene vier Fälle nicht zu isolirt dastehen zu lassen.

39. Wenn die im vorigen Paragraphen geforder-

ten Zeichnungen sorgfältig gemacht werden und die Resultate der daran zu knüpfenden Messungen nur einigermaßen übereinstimmen, so wird den Schülern die Lehre von der Kongruenz schon deutlich sein, und sie werden die Schlußfrage leicht beantworten können, nämlich in folgender Weise: «wenn die drei Seiten in einem Dreiecke so groß sind als im andern, so müssen auch die drei Winkel im einen so groß sein als im andern» etc. Diese Sätze müssen aber nicht weniger geübt werden, als die vier Hauptlehrsätze.

40. Die für die gesammte Geometrie so unendlich wichtige Lehre von der Aehnlichkeit ist hier scheinbar zu kurz behandelt worden. Allein der Lehrer muß den nothwendigen Uebergang und die weitere Begründung selber geben. Zunächst kam es darauf an, durch die enge Nebeneinanderstellung dieser beiden Paragraphen die innere Analogie zwischen der Kongruenz und der Aehnlichkeit hervorzuheben. Der Unterschied in der Bildung ähnlicher Dreiecke besteht ja nur darin, daß man eine andere Grundseite annimmt, und somit alles in einem andern Maßstabe ausführt; folglich ist nicht mehr von der absoluten Länge der Seiten, sondern von ihrer relativen Länge, d. h. von ihrem Verhältnisse zur Grundseite die Rede. Der Begriff der Aehnlichkeit, nämlich die Gleichheit der Gestalt, und der Begriff der Gestalt selbst muß freilich gründlich erläutert werden; dann aber ergibt sich alles von selbst, sobald man nur in der Ableitung des Lehrsatzes genetisch verfährt. In dieser Beziehung, und auch wegen der späteren Anwendung, ist der erste Satz (Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel im einen so groß sind als im andern)

von größerer Wichtigkeit als die anderen. Es ist, wie aus dem zweiten Kapitel erhellt, die natürlichste Entstehung eines Dreiecks, daß von den Endpunkten der Grundseite, als zwei Punkten einer Richtlinie, unter bestimmten Winkeln zwei Stralen ausgehen, deren Durchschnitt den Ort der Spitze des Dreiecks bestimmt. Die beiden Stralenwinkel sind offenbar allein für die Gestalt des Dreiecks wesentlich und bestimmend; von ihnen hängt das Verhältniß der Seiten zur Grundseite ab und wo bei verschiedenen Grundseiten die Winkel dieselben sind, da müssen die Dreiecke ähnlich sein. Die übrigen Sätze lassen sich übrigens mit derselben apriorischen Nothwendigkeit aus der Genesis ähnlicher Dreiecke ableiten.

Hier ist nun der Ort, die Verhältnißlehre wieder in Erinnerung zu bringen. Man nenne anfangs die Seiten des einen Dreiecks A, B, C, und die des anderen A_1, B_1, C_1, wodurch angedeutet werden soll, daß A und A_1 ꝛc. entsprechende, d. h. gleichen Winkeln gegenüberliegende Seiten sind. Zunächst vermeide man die gewöhnliche Form der Proportionen, sondern übe folgende Sätze: «Wenn bei ähnlichen Dreiecken die Grundseite des einen 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß ist als die des andern, so sind auch die andern Seiten im einen 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß als im andern.» Wenn $A_1 = \frac{3}{4}A$, so ist auch $B_1 = \frac{3}{4}B$, und $C_1 = \frac{3}{4}C$. Ferner (ich gebe hier nur die Formeln, die jedoch immer erst in Worten auszusprechen sind) wenn $B = \frac{2}{3}A$, so ist auch $B_1 = \frac{2}{3}A_1$; wie B aus A, so ist B_1 aus A_1 entstanden» u. s. w. Dann erst nehme man die Form $B : A = B_1 : A_1$ oder $B : B_1 = A : A_1$ vor, wobei je-

doch der Schüler angeben muß, daß in der ersten Form die Seiten jedes Dreiecks in ein Verhältniß zusammengefaßt sind, und die entsprechenden Seiten beider Dreiecke entweder Vorder- oder Hinterglieder sind, während in der zweiten Form die entsprechenden Seiten in ein Verhältniß zusammengefaßt sind, und die Seiten desselben Dreiecks entweder Vorder- oder Hinterglieder sind. Hat man dies recht deutlich gemacht, so wähle man ganz willkührliche Bezeichnungen nicht parallel gezeichneter Dreiecke, z. B. acf $\backsim$ bgh, wo der Schüler die entsprechenden Seiten erst finden muß.

Zu besonderer Einübung diene endlich der Satz, daß das rechtwinklige Dreieck durch die Höhe in zwei ähnliche Dreiecke zerlegt wird, welcher Satz absichtlich nicht in den Leitfaden aufgenommen ist, um dem Schüler die Freude der Erfindung zu lassen. Man kann dabei entweder ein Perpendikel fällen oder den rechten Winkel so zerlegen lassen, daß jeder Theilwinkel dem nicht zunächstliegenden spitzen gleich wird; in beiden Fällen werden die Schüler leicht den Grund der Aehnlichkeit entdecken. Darauf müssen sie die neun dabei vorkommenden Proportionen angeben und zwar nach der in der Note zu §. 63 gegebenen Bezeichnungsweise, so daß (wenn z. B. C die Hypotenuse ist) $C_1 : B = B : C$ oder $A : B = C_2 : H$; zuvor jedoch muß, wo möglich ohne Zeichnung, folgende Art der Beschreibung geübt werden: «die kleinere Kathete des ganzen Dreiecks ist Hypotenuse des kleineren Theildreiecks, der größere Abschnitt der Hypotenuse ist die größere Kathete des größeren Theildreiecks» ꝛc. Ferner: «Wenn die Höhe 2, 3, 4 ꝛc

mal so groß ist, als der kleinere Abschnitt der Hypotenuse, so muß der größere Abschnitt auch 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß sein als die Höhe — oder mit andern Worten: der kleinere Abschnitt der Hypotenuse verhält sich zur Höhe, wie die Höhe zum größeren Abschnitt.» Daran müssen endlich Berechnungen von rechtwinkligen Dreiecken aus zwei Bestimmungsstücken geknüpft werden; ja mit fähigeren Schülern mag man schon hier den Pythagoreischen Lehrsatz ableiten, doch darf man keine algebraischen Mittel anwenden.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Lehre vom Dreieck.

41. Die Zurückführung aller geometrischen Sätze und Aufgaben auf die Lehre vom Dreieck bildet den Kern aller geometrischen Methode. Wenn die Elemente, wie sie bis dahin vorgetragen sind, wirklich Eigenthum des Schülers geworden sind, so wird das Uebrige weiter keine Schwierigkeit machen. Namentlich wird es ihm nicht unnatürlich und also auch nicht unbegreiflich sein, wozu man hier und da Hülfslinien anwendet, und wie man sie ziehen muß. Denn die Hülfslinien dienen wesentlich nur dazu, um verwickelte Verhältnisse auf die einfachen Elemente, nämlich auf Dreiecke zurückzuführen, und um Unverbundenes mit Hülfe von Dreiecken zu verbinden. Im §. 41 ist eben nur die Methode abstrakt ausgespro-

chen, die der Schüler sich im Folgenden aneignen soll. Auch ist, wie man sieht, in diesem Kapitel nur das Wesentlichste zusammengestellt; nach Umständen mag der Lehrer den Kreis des Lehrstoffes erweitern und dem Schüler, der ihm mit Eifer folgt, die unendliche Mannigfaltigkeit geometrischer Erscheinungen vorführen, die sich an das Gegebene anknüpfen lassen.

42—48. Ueber die einzelnen Sätze, die hier zusammengestellt sind, ist wenig zu sagen. Der Satz §. 44, daß die Anzahl der Dreiecke, welche durch gleiche Theilung der Seiten und durch Parallelenziehung entstehen, so groß ist als das Quadrat der Anzahl der Seitentheile, ergibt sich bei Betrachtung der Figur leicht aus der Bildung der Quadratzahlen. Wenn man z. B. eine Seite eines Dreiecks in 5 gleiche Theile theilt und durch die 4 Theilpunkte 2 . 4 Parallelen mit den andern Seiten und endlich auch noch 4 Parallelen mit der getheilten Seite zieht, so entstehen lauter kongruente Dreiecke, was leicht zu beweisen ist. Zunächst 1 Dreieck an der Spitze, dann 3, dann 5, 7, endlich 9. Diese Reihe 1, 3, 5, 7, 9 läßt sich leicht als nothwendig erweisen; und wenn der Schüler früher eingesehen hat, daß die Summe dieser Reihe das Quadrat der Anzahl der Glieder ist, so wird ihm auch der darauf beruhende geometrische Satz deutlich sein. Die Folgerung aber, daß ähnliche Dreiecke sich verhalten wie die Quadrate der Seiten, hat nun gar keine Schwierigkeit, sobald man vom Irrationalen ganz absieht, was bei einer elementaren Darstellung der Geometrie nothwendig geschehen muß. Man wird aber nicht einsehen, was diese neue Ableitung eines Satzes soll, der sich sonst

ganz einfach aus der Lehre vom Flächeninhalt ergibt (nämlich aus dem Satze §. 58: Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus Grundseiten und Höhen). Eine einfache pädagogische Beobachtung hat mich bewogen, jener Darstellung den Vorzug zu geben, nämlich die, daß eine interessante Anschauung, die wir unsrer Phantasie einprägen, treuer in der Erinnerung bewahrt wird, als eine Folgerung, die wir nur mit dem Verstande aufnehmen. Der Satz nun, daß ähnliche Flächen sich wie die Quadrate entsprechender Linien verhalten, wird, wie wol jeder Lehrer weiß, von den Schülern nur mühsam und nach wiederholten Demonstrationen begriffen, indem immer wieder die unüberlegte Meinung hervortritt, wenn die Seiten z. B. dreimal so groß seien, müsse auch die Fläche dreimal so groß sein. Dieser falschen Meinung nun tritt die Anschauung des richtigen Verhältnisses mächtiger entgegen, als eine Widerlegung durch den Verstand, die übrigens, namentlich bei älteren Schülern, an der gehörigen Stelle nicht versäumt werden darf. Namentlich empfiehlt sich die hier gegebene Darstellung, weil sie sich auch leicht auf ähnliche vielseitige Figuren anwenden läßt, indem man diese zuvor in Dreiecke zerlegt. Man vermeide nur hier, wie besonders auch bei §. 48, algebraische Deduktionen (wie z. B. die, daß wenn $a : b = c : d = e : f$, dann auch $a + c + e : b + d + f = e : f$), die dem Schüler wenigstens in dem Alter, wo er mit den entsprechenden geometrischen Erscheinungen schon vertraut sein sollte, noch ganz räthselhaft sind.

Die 3te Aufgabe §. 48, die namentlich beim perspektivischen Zeichnen häufig vorkommt, wird nach dem

Satze gelöst, daß die Verbindungslinien der entspre-chenden Ecken parallelliegender ähnlicher Figuren sich in Einem Punkte (dem Aehnlichkeitspunkte) schneiden müssen. Man verbinde demnach die gegebenen Punkte mit beliebigen Punkten der gegebenen Stralen zu einer Figur und zeichne, von einem andern Punkte in dem einen Stral ausgehend, indem man Parallelen zieht, eine zweite ähnliche Figur; zieht man dann von den gegebenen Punkten Linien nach den entsprechenden Punkten der zweiten Figur, so müssen diese ebenfalls nach dem unerreichbaren Stralenpunkte hingehen.

Fünftes Kapitel.

Vom Kreis.

49. Die Lehrsätze über den Kreis sind möglichst kurz angedeutet worden, da die ganze Lehre vom Kreis ebenfalls nur eine Erweiterung und Anwendung der früheren Sätze ist. Doch muß der Lehrer nicht ebenfalls kurz darüber weggehen, sondern den Schüler durch eigne Arbeit ergänzen lassen, was im Leitfaden nur angedeutet ist. Im Einzelnen ist nur Folgendes zu bemerken.

50. Daß Sehnen mit gleichen Radien sich nicht wie die Mittelpunktswinkel verhalten, erkennt man daraus, daß, wenn der Winkel doppelt so groß wird, die Sehne des doppelten Winkels mit den beiden

Sehnen der beiden halben Winkel ein gleichschenkliges Dreieck bildet etc.

51. Daß die Endpunkte der Sehne symmetrische Punkte in Bezug auf den perpendikulären Radius sind, ergibt sich aus der Lehre von der Symmetrie.

52. Ueber die hier gegebene Auffassung der Tangente vergleiche, was oben über die *verändernde Bewegung* gesagt ist.

53. 54. Der Umfangswinkel wird hier als Durchschnittswinkel zweier *Sekanten* betrachtet, wodurch der Uebergang zu dem Satz über den Winkel, den die Tangente mit der Sehne bildet, erleichtert wird. (In der 14ten Zeile sind durch ein Versehen beim Drucke einige Wörter ausgelassen, wodurch der Zusammenhang undeutlich wird. Es muß heißen: «so wird die eine Sekante zur Sehne und die andere Sekante zur Tangente».)

Sechstes Kapitel.

Größenberechnung.

Ueberschrift und Anordnung des letzten Kapitels wird sich selbst rechtfertigen. Auch wird im Einzelnen wenig zu erläutern sein. Im Allgemeinen ist es, um das Interesse an den folgenden Lehrsätzen zu steigern, sehr rathsam, mit dem Unterricht sogleich praktische Messungen und Berechnungen zu verknüpfen, wozu sich ja überall leicht passende Gegenstände darbieten; denn es ist nicht zu sagen, wie sehr eine aus dem Leben und der Umgebung gegriffene Aufgabe den

Schüler mehr interessirt, als eine abstrakt gefaßte wie ein Lehrbuch sie geben kann.

56. Wegen nachfolgender Betrachtungen, namentlich auch wegen der Anwendung in der Stereometrie wäre es zweckmäßig gewesen, dem Trapez schon hie größere Aufmerksamkeit zu widmen. Der Lehrer kann indeß das Versäumte nachholen. Das Trapez is eben so groß als ein Rechteck, welches dieselbe Höh und die **mittlere Breite** des Trapezes zur Grundseite hat.

59. Bei der Zerlegung geradliniger Figuren i Trapeze, wie sie hier kurz angedeutet ist, muß ma den Unterschied der Abschnitte (die Abszissendifferenz zweier Punkte als die Höhe des Trapezes und da arithmetische Mittel zwischen den Höhen (den Ordinaten) der zwei Punkte als die mittlere Breite behandeln, so daß, wenn x' und x'' die beiden Abschnitte, y' und y'' die beiden Höhen sind, der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{1}{2}(y' + y'')(x' - x'')$ Dabei ist jedoch besondere Rücksicht auf das Negativ zu nehmen, das offenbar bei Betrachtung der Fläch eine andere Bedeutung hat, als bei Höhe und Abschnitt, obgleich natürlich dieselbe Vorstellung zum Grunde liegt. Die Fläche jedes Trapezes entsteh durch parallele Bewegung der sich verkürzenden ode verlängernden Ordinate; das Maß der Bewegung d. h. hier: die Höhe des Trapezes, ergibt sich, wenn man jede Abszisse von der folgenden abzieht; als sind bei den 5 Trapezen der ersten Aufgabe die Höhen folgende: $3 - 0 = 3$; $7 - 3 = 4$; $4 -$ $= -3$; $2 - 4 = -2$; $0 - 2 = -2$; d. h bei den 3 letzten ist die Bewegung rückgängig, un

die dadurch entstehenden Trapeze sind negativ. Man findet also den Flächeninhalt des Fünfecks durch folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{lllr}
1) & \frac{1}{2}\,(4 + 6)\,(3 - 0) = & +\ 15 & \\
2) & \frac{1}{2}\,(6 + 5)\,(7 - 3) = & +\ 22 & \\
3) & \frac{1}{2}\,(5 + 4)\,(4 - 7) = & & -\ 13\frac{1}{2} \\
4) & \frac{1}{2}\,(4 + 1)\,(2 - 4) = & & -\ 5 \\
5) & \frac{1}{2}\,(1 + 4)\,(0 - 2) = & & -\ 5 \\
\hline
 & & 37 & -\ 23\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}
\end{array}
$$

Bei der zweiten Aufgabe kann man grade so verfahren, jedoch werden die Ordinaten bei der rücklaufenden Bewegung (zwischen c und d) negativ, und nun erzeugt die negative Bewegung dieser negativen Linie eine **positive** Fläche, nämlich den Theil des Fünfecks auf der negativen Seite der Richtlinie; dies ergibt auch die Rechnung:

$$
\begin{array}{llr}
1) & \frac{1}{2}\,(2 + 4)\,(0 + 4) & = +\ 12 \\
2) & \frac{1}{2}\,(4 + 1)\,(3 - 0) & = +\ 7\frac{1}{2} \\
3) & \frac{1}{2}\,(1 - 2)\,(2 - 3) & = +\ \frac{1}{2} \\
4) & \frac{1}{2}\,(-\ 2 - 3)\,(-\ 1 - 2) & = +\ 7\frac{1}{2} \\
5) & \frac{1}{2}\,(-\ 3 + 2)\,(-\ 4 + 1) & = +\ 1\frac{1}{2} \\
\hline
 & & 29
\end{array}
$$

Hier machen freilich für die gewöhnliche Betrachtungsweise das 3te und 5te Trapez einige Schwierigkeit, die aber der mit negativen Linien und Flächen Vertraute leicht lösen wird; die nicht parallelen Seiten des Trapezes kreuzen sich, von den parallelen ist die eine positiv und die andere negativ; also ist auch sowol von den zwei rechtwinkligen Dreiecken, die das Trapez auszumachen scheinen, als auch von den zwei Dreiecken, die durch eine Diagonale gebil-

det werden würden, das eine positiv und das andere negativ; und der Unterschied zwischen beiden ist als der Flächeninhalt des Trapezes anzusehen. — Sollte indessen der schwächere Schüler noch nicht im Stande sein, die negativen Größen zu behandeln, so kann man sie ja leicht durch Verlegung der Richtlinie und des Anfangspunktes in positive verwandeln, wobei es ihn besonders freuen wird, bei verschiedenen Verlegungen doch stets dasselbe Resultat zu gewinnen.

60. Der Schüler muß selbst folgende Sätze auffinden und sich geläufig machen:

Man findet die Höhe (oder die Grundseite) eines Dreiecks, indem man den doppelten Flächeninhalt durch die Grundseite (oder die Höhe) dividirt. Man findet die Höhe (oder die Grundseite) eines Parallelogramms, indem man den Flächeninhalt durch die Grundseite (oder die Höhe) dividirt.

61. Auch hier muß die vorzunehmende Operation zuvor mündlich erörtert werden.

63—67. Die folgenden Paragraphen enthalten eine meines Wissens neue Ableitung des Pythagoreischen Lehrsatzes, bei der es indeß dem Verfasser weniger darauf ankam, zu den vielen alten Beweisen noch einen neuen hinzuzufügen, als darauf, den Lehrsatz genetisch und ganz allgemein und zwar auf rein geometrischem Wege abzuleiten. Zum Verständniß bedarf es höchstens einer Hinweisung auf das, was oben in Bezug auf die negativen Abschnitte und die daraus erzeugten negativen Rechtecke gesagt ist.

68. Wie der Kreis sich in eine unendliche Menge von Dreiecken zerlegen läßt, so besteht die ringförmige Fläche aus einer unendlichen Menge von Tra-

pezen, und sie ist daher so groß als ein Rechteck, dessen Höhe dem Unterschied der Radien der Ringkreise und dessen Grundseite der **mittleren** Kreislinie gleich ist. Dies möge der Lehrer hier einschalten als Vorbereitung für die 7te Aufgabe S. 62 und zugleich für die Behandlung des abgestumpften Kegelmantels in der Stereometrie.

69. Die Berechnung der Zahl π ist hier nur angedeutet; denn wenn sie sich auch durch Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes berechnen läßt, so ist doch diese Berechnung selbst für die Schüler zu schwierig. Höchstens sollte man den Umfang des eingeschriebenen und umgeschriebenen Sechsecks und Zwölfecks wirklich berechnen lassen, damit der Schüler eine Vorstellung von der Rechnung gewinne. Um so mehr aber ist es nothwendig, die Zahl selbst dem Schüler fest einzuprägen und ihre Bedeutung und Anwendung recht klar und anschaulich zu machen. Dazu dienen namentlich die Aufgaben S. 62, die der Lehrer nach Umständen leicht wird vermehren können. Zur Lösung der 5ten und der folgenden Aufgaben bedarf es einer Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes, die indeß der Schüler selbst auffinden und erläutern muß.



Anhang.

Da es bei den im Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie aufgegebenen Zeichnungen namentlich auf Genauigkeit in der Ausführung ankommt, so mögen hier die Resultate der Messungen einen Platz finden, wie sie sich leicht aus der Berechnung ergeben. Zugleich geben wir die Auflösungen der schwierigeren Rechenaufgaben.

§. 30.

1) Gegeben		Gefunden	
$\sigma = 60^0$	$S = 2$	$H = 1,732$	$A = 1$
$\sigma = 25^0$	$A = 2$	$S = 2,206$	$H = 0,9326$
$A = 1$	$S = 2$	$\sigma = 60^0$	$H = 1,732$
$A = -1$	$H = 2$	$\sigma = 116^0 34'$	$S = 2,236$
$A = -1$	$H = -2$	$\sigma = -116^0 34'$	$S = 2,236$
$\sigma = -70^0$	$H = -3$	$S = 3,1925$	$A = 1,0919$

2) Gegeben

	für b	c	d	e	f
$\sigma =$	32°	78°	165°	— 125°	— 27°
S =	3	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$2\frac{2}{3}$

Gefunden

H =	+ 1,589	+ 2,445	+ 0,582	— 1,638	— 1,2106
A =	— 2,544	+ 0,519	— 2,173	— 1,147	+ 2,376

Länge der Seiten

bc	cd	de	ef	fa
2,197	3,219	2,446	3,549	2,805

Richtung

157° 5′	+ 213° 13′	+ 294° 48′	6° 55′	86° 33′
oder	— 146° 47′	— 65° 12′		

§. 31.

1) 209,77 2) 35° 45′ 3) 37,30 4) 4° 7′ 40″

§. 32.

1)

Gefunden für	c	d	e
Entfernung von a:	1284,80	1378,47	3085,38
" " b:	2819,26	2038,11	1566,49
Höhe:	+ 1279,92	+ 1169,01	+ 1542,69
Abschnitt:	— 111,98	+ 730,48	+ 2672,02

Gefunden für	f	g
Entfernung von a:	5146,82	2160,27
" " b:	3650,31	2357,68
Höhe:	— 3308,31	— 1907,41
Abschnitt:	+ 3942,69	+ 1014,19

2) 271,17

§. 38.

1) $\alpha = 78°$, B = 1,759, C = 2,823.
2) $\alpha = 99°$, A = 4,351, C = 3,564.
3) $\alpha = 119°$, $\beta = 41°$, C = 1,564.

4) $\beta = 47^\circ 37'$, $\gamma = 32^\circ 23'$, $C = 2,175$.
5) $\alpha = 54^\circ 26'$, $\gamma = 101^\circ 34'$, $C = 6,022$; oder
$\alpha = 125^\circ 34'$, $\gamma = 30^\circ 26'$, $C = 3,114$.
6) $\alpha = 47^\circ 31'$, $\gamma = 58^\circ 29'$, $B = 3,519$,
$C = 3,121$.
7) $\alpha = 36^\circ 52'$, $\beta = 53^\circ 8'$, $\gamma = 90^\circ$.
8) $\alpha = 48^\circ 35'$, $\beta = 102^\circ 9'$ $\gamma = 29^\circ 16'$,
$A = 3,069$.
9) Das Dreieck ist unmöglich.

§. 59.

1) $F = 13\frac{1}{7}$. 2) $F = 29$.

§. 65.

3\. 1) $C = 5$, $C_1 = 3,2$, $C_2 = 1,8$, $H = 2,4$.
2) $A = 8$, $C_1 = 3,6$, $C_2 = 6,4$, $H = 4,8$.
3) $B = 39$, $C_1 = 23,4$, $C_2 = 41,6$, $H = 31,2$.
4) $C = 12,094886$, $C_1 = 6,803361$, $C_2 = 5,291525$,
$B = 9,071178$.
5) $H = 3,741657$, $B = 7,937253$, $A = 4,242639$.
6) $C_2 = 3$, $C = 15$, $A = 6,718204$, $B = 13,416408$.
7) $H = 5,656852$, $C_1 = 4,571428$, $C = 11,571428$,
$B = 7,273093$.
8) $A = 6,292853$, $C_1 = 1,875342$, $C_2 = 5,424758$,
$H = 3,189557$.

4\. Wenn $S = 2$, so ist $H = 1,732050$ und
$F = 1,732050$.
Wenn $S = 4$, so ist $H = 3,4641$ und $F = 6,9282$.
Wenn $S = 1$, so ist $H = 0,866025$ und
$F = 0,4330125$.

5\. $D = 1,414213$. $S = 0,707106$.

6\. Dreieck $= 1,299037$. Viereck $= 2$. Sechseck $=$
$2,598075$.

§. 66.

	Seite	Abschnitt 1	Abschnitt 2	Höhe	Flächeninhalt
1) A	10	6,15	3,85	10,304246	51,52123
B	11	3,5	7,5	9,367496	
C	12	6,875	5,125	8,586871	
2) A	80	57,34375	22,65625	81,9249	3276,999
B	85	21,323529	63,676471	77,1058	
C	100	54,125	45,875	65,5399	
3) A	2,25	1,416666	0,833333	2,35702	2,65165
B	2,5	0,75	1,75	2,12132	
C	2,75	1,590909	1,1590909	1,92847	
4) A	15	11	4	13,416409	100,62307
B	14	4,285714	9,714285	14,374723	
C	17,34935	7,83891	9,51044	11,599637	
5) A	20	12	8	27,495457	274,95457
B	28,63564	5,587442	23,048198	19,203655	
C	30	22	8	18,330305	
6) A	7	3	4	3,919183	13,71714
B	5,6	5	0,6	4,898980	
C	4,9355848	0,6807704	4,2548144	5,558466	

§. 67.

	Seite.	Abschnitt 1	Abschnitt 2	Höhe	Flächeninhalt
1) A	10	17,8	—5,8	9,1192114	45,596057
B	12	—6,5	18,5	7,5993428	
C	20	11,1	8,9	4,5596057	
2) A	25,27845	14,59741	10,68104	10,54367	133,26381
B	15	18	—3	17,768508	
C	18	—2,5	20,5	14,80709	
3) A	30	17,91666	12,083333	8,887804	133,31706
B	15	24,16666	—9,16666	17,775608	
C	20	—6,875	26,875	13,331706	
4) A	5	7	—2	9,333333	23,333333
B	9,545214	—1,047639	10,592853	5,098542	
C	11,66666	8,66666	3	4	
5) A	10,583005	7,559290	3,023715	2,618614	13,856408
B	4	8	—4	6,928204	
C	8	—2	10	3,464102	
6) A	25,3	—46,638537	71,938537	46,33015	586,0764
B	85	21,412294	63,587706	13,79003	
C	65	83,1531538	—18,1531538	18,03312	

3. Die Diagonale = 14,96663
4. Die Seite = 76,5539

§. 70.

2)

R =	P =	F =
2′	12,5663708′	12,5663708 □′
3″	18,8495562″	28,2743343 □″
7‴	43,9822978‴	153,9380423 □‴
5′ 3″	32,9867233′	88,2773389 □′
8′ 7″ 3‴	54,06157′	232,57737 □′
1 M.	6,2831854 M.	3,1415927 □M.
½ M.	3,1415927 M.	0,7853982 □M.
1⅔ M.	10,4719756 M.	8,726646 □M.
7,5‴	47,1238905‴	176,7126 □‴

3)

P =	R =	F =
2′	0,3183099′	0,3183099 □′
3″	0,4774649″	0,7161973 □″
7‴	1,114084‴	3,8992999 □‴
5′ 3″	0,8355634′	2,193354 □′
8′ 7″ 3‴	1,3693956′	5,891253 □′
1 M.	0,1591549 M.	0,0795774 □M.
½ M.	0,0795774 M.	0,0198944 □M.
1⅔ M.	0,2652582 M.	0,2210484 □M.
7,5‴	1,193662‴	0,4476233 □‴

4) R = 4,13739 7) F = 40,840705
9) F = 13,69571 und R = 2,087937
10) F = 264,15927.

Seite 64.

1) $F = R^2 \sqrt{3}$ = 1,73205, 6,9282, 43,30125 ꝛc.
2) 523 Menschen. 3) 204,675 Ellen. 5) 212,206
6) 2592,3501 □′ 7) 3959,7978 □′
8) Das Verhältniß der Flächen bei gleichem Umfange ergibt sich aus folgender Uebersicht:

Kreis		Quadrat		Dreieck
1	:	$\frac{1}{4}\pi$	:	$\frac{1}{9}\pi \sqrt{3}$
$\frac{4}{\pi}$	:	1	:	$\frac{4}{9}\sqrt{3}$
$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$	:	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	:	1

oder in Zahlen			
	1	: 0,7853981	: 0,6045997
	1,2732393	: 1	: 0,7698002
	1,6539868	: 1,2990381	: 1.

Das Verhältniß der Umfänge bei gleichen Flächen ist folgendes:

Kreis		Quadrat		Dreieck
1	:	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	:	$\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}}$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	:	1	:	$\frac{1}{2}\sqrt[4]{27}$
$\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{27}}$	:	$\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$	:	1

oder in Zahlen:

1	:	1,1283788	:	1,2860740
0,8862272	:	1	:	1,1397532
0,7775602	:	0,8773827	:	1.

Im Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie sind folgende Druckfehler stehen geblieben, die man den Schüler möge korrigiren lassen:

Seite	Zeile		statt	lies:
Seite 7	Zeile 6	v. o.,	statt $a_{-2} a_2$	lies: $a_2 a_{-2}$
„ 8	„ 13	„	„ 3 Hundertel	„ 5 Hundertel
„ 29	„ 11	v. u.,	„ $S = -3$	„ $H = -3$
„ 56	„ 11	„	„ $H = 8$	„ $H = 6$
„ 58	„ 7	v. o.,	„ $C^2 + B^2 - A^2$	„ $C^2 + A^2 - B^2$
„ 64	„ 6	„	„ kreiförmig	„ kreisförmig

„ 48 „ 14 sind einige Worte ausgefallen, worüber man oben die Erläuterungen zu dieser Stelle nachsehen möge.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

